

**UNIVERSIDAD DE SANTANDER**

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS**

**DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS**

**CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS**

**CALCULO DINAMICO Y TEORIA  
DE PLACAS**

**problemas**

**AVELINO SAMARTIN QUIROGA  
J.R. GONZALEZ DE CANGAS  
LUIS MORENO GARCIA  
JAVIER TORRES RUIZ**

**PUBLICACION : AE - 80.5**

**1980**

# PROLOGO

Con esta publicación de la Cátedra de Cálculo de Estructuras, finaliza el programa previsto para este año académico. El objetivo del mismo era resumir las distintas prácticas que se realizan durante el curso de Análisis de Estructuras I en una serie ordenada de problemas como los aquí presentados.

Esta publicación tiene un carácter incluso más pronunciado que las anteriores, de introducción a una serie de temas diversos: estructuras continuas bidimensionales, análisis en rotura, cálculo dinámico, etc. Esta heterogeneidad en su contenido, era necesaria, ya que este curso constituye el único en donde los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, que no siguen la especialidad de Estructuras, tienen la oportunidad de encontrarse con unas nociones actualísimas y usuales incluso en tres áreas estructurales que por su carácter general no pueden dejar de ser impartidas, si bien dada la limitación del curso, sólo con un carácter somero e informativo.

Esta Cátedra espera que ésta, igual que las anteriores publicaciones, haya servido para facilitar el estudio y comprensión del Cálculo de Estructuras. Si lo ha conseguido, es su mejor y única esperada recompensa.

# INDICE

## A : CALCULO DINAMICO

1. Sistemas de un grado de libertad.
2. Sistemas de varios grados de libertad
3. Sistemas continuos.

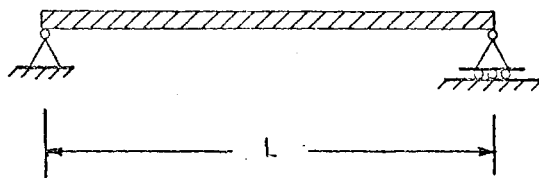
## B : TEORIA DE PLACAS

4. Placas rectangulares: Cálculo elástico.
5. Placas circulares: Cálculo elástico.
6. Cálculo en rotura.

EJERCICIO E1.1

Determinar el periodo propio de una viga simplemente apoyada de luz  $L$ , sección constante, con rigidez a flexión  $EI$  y masa total  $M$ , uniformemente distribuida en toda su longitud, en cada uno de los casos siguientes:

- Concentrando toda su masa en el centro de la luz.
- Suponiendo la masa distribuida y que las flechas siguen una ley sinusoidal.
- Concentrando las masas en el punto central y en los apoyos.



Masa  $M$   
Rigidez a flexión  $EI$

Fig. E 1. 1a

a)

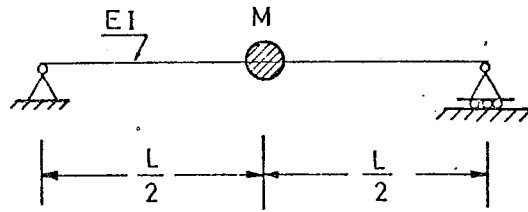


Fig. E1.1b.- Viga del apartado a)

El sistema de la figura E1.1b tiene un grado de libertad que es el desplazamiento vertical de la masa, ya que se supone masa rotatoria nula.

La flexibilidad  $f$  es la relación entre la flecha y la carga que se aplica. En este caso se tiene:

$$f = \frac{w}{p} = \frac{L^3}{48 \cdot EI}$$

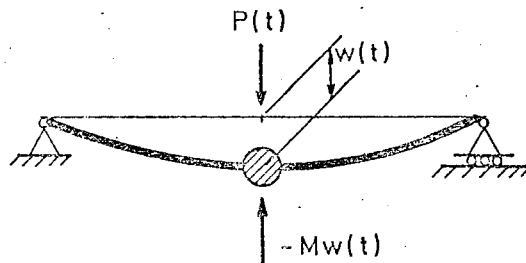


Fig. E1.1c.- Deformada para el caso del apartado a)

Según la figura E1.1c la ecuación del movimiento es:

$$\{P(t) - M\ddot{w}(t)\} f^{-1} = w(t)$$

o bien:

$$M\ddot{w} + \frac{48 \cdot EI}{L^3} w = P(t)$$

en este caso  $P(t) = 0$  (vibraciones libres) y se tiene que:

- la pulsación  $\omega$  es:

$$\omega = \sqrt{\frac{48 \cdot EI}{L^3 M}} = \frac{4}{L} \sqrt{\frac{3 \cdot EI}{ML}}$$

- el periodo propio es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi L}{2} \sqrt{\frac{ML}{3 \cdot EI}} \approx 0,9069 L \sqrt{\frac{ML}{EI}}$$

b)

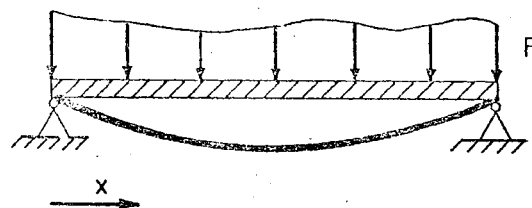


Fig. E1.1d.- Viga del apartado b)  
y su deformada

Se supone que las flechas varían según la ley siguiente:

$$w(x,t) = w(t) \sin \frac{\pi x}{L}$$

que satisface las condiciones cinemáticas (esenciales) de -- contorno.

En una posición genérica de equilibrio en el instante  $t$  se aplica el principio de los trabajos virtuales:

$$\delta U = \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx$$

$$\delta W = \int_0^L p \delta w dx + \int_0^L m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot \delta w dx$$

$$\delta U + \delta W = 0$$

Siendo  $p$  una fuerza vertical distribuida sobre la viga y  $m$  la masa distribuida, que al suponerla constante -- se puede escribir  $m = \frac{M}{L}$ . En este caso de vibraciones libres  $p = 0$  en todo punto de la viga. Si se supone  $\delta w = \delta w^* \sin \frac{\pi x}{L}$  se tiene:

$$\delta U = EI \left( \frac{\pi^4}{L^4} \right) w \int_0^L \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx \cdot \delta w^* = w \frac{EI \pi^4}{L^3} \delta w^*$$

$$\delta W = \frac{M}{L} \ddot{w} \int_0^L \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx \delta w^* = \frac{M}{L} \ddot{w} \cdot L \delta w^* = M \ddot{w} \delta w^*$$

por lo tanto resulta, para  $\delta w^*$  arbitrario, que:

$$M \ddot{w} + \frac{EI \pi^4}{L^3} w = 0$$

- la pulsación es:



$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{ML^3}} = \frac{\pi^2}{L} \sqrt{\frac{EI}{L}}$$

y el periodo propio es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{\pi} L \sqrt{\frac{ML}{EI}} \approx 0,6366 L \sqrt{\frac{ML}{EI}}$$

c)

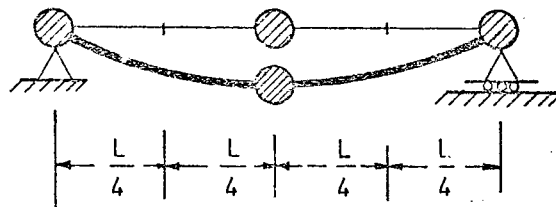


Fig. E1.1e.- Viga del apartado c) y su deformada

La fórmula que da el periodo es en este caso (sólo es activa como en el apartado a) la masa central):

$$T = \frac{\pi}{2} L \sqrt{\frac{ML}{6EI}} \approx 0,64131 \sqrt{\frac{ML}{EI}}$$

valor que concuerda muy bien con la solución exacta que está representada en este caso por la fórmula del apartado b).

EJERCICIO E1.2

Determinar la frecuencia del sistema no amortiguado de la figura E1.2a. La viga y el muelle se suponen sin masa. Solamente existe una masa concentrada, de valor  $m$ , en el punto ①.

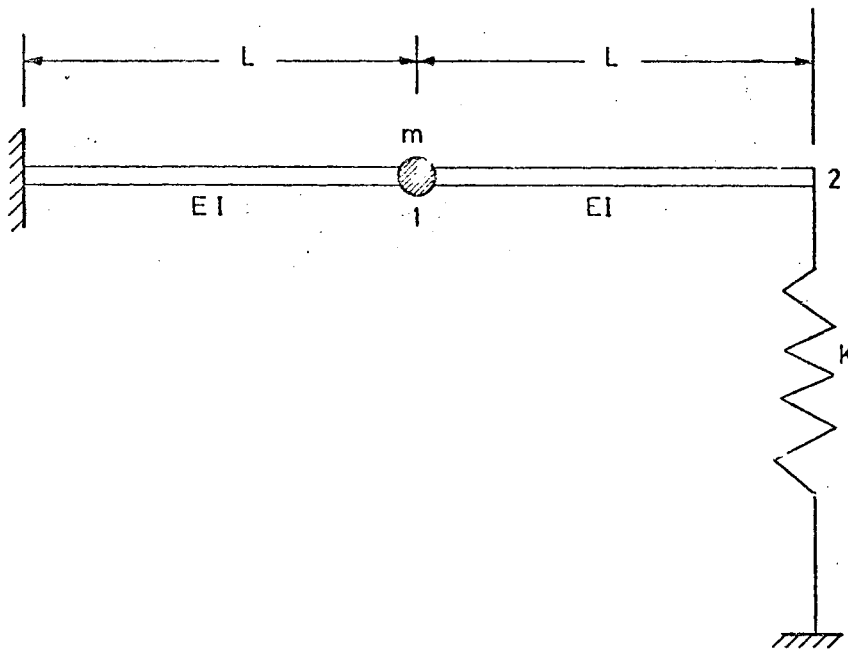


Fig. E1.2a

La estructura de la figura E1.2b tiene un grado de libertad, pues el movimiento del punto ② viene obligado por el del punto ①.

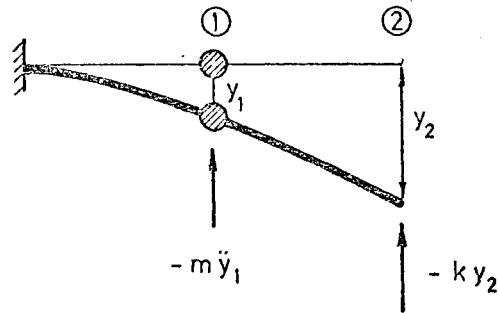


Fig. E1.2 b

Se tomará como grado de libertad independiente el del punto ①, planteando la ecuación de equilibrio dinámico respecto al grado de libertad  $y_1$ . La ecuación quedará de la forma:

$$m^* \ddot{y}_1 + K^* y_1 = 0 \quad \{E1.2a\}$$

El cálculo de  $y_1$  se efectúa llamando  $f_{11}$  a la flecha en ① debida a una fuerza unidad en ① (figura E1.2c):

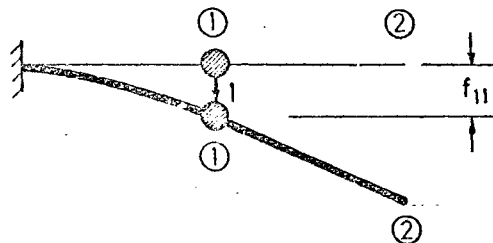


Fig. E1.2c

y  $f_{12}$  a la flecha en ① debida a una fuerza unidad en ② - (figura E1.2d):

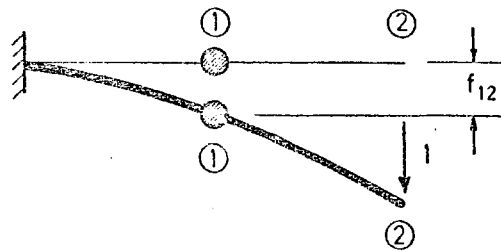


Fig. E1.2d

Entonces el desplazamiento  $y_1$  será:

$$y_1 = (-m \ddot{y}_1) f_{11} + (-K y_2) f_{12}$$

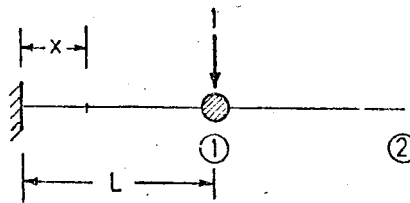


Fig. E1.2e

Teniendo en cuenta la figura E1.2e y aplicando Bresse se tiene:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M}{EI} (L-x) \cdot dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (L-x)^2 \cdot dx = \frac{L^3}{3EI} = f_{11}$$

Análogamente se tiene para  $f_{12}$  (figura E1.2f):

$$f_{12} = \int_0^L \frac{M}{EI} (L-x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (2L-x)(L-x) dx =$$

$$= \frac{5L^3}{6EI} = f_{12}$$

Figura E1.2f

Luego queda:  $y_1 = -m \frac{L^3}{3EI} \ddot{y}_1 - K \frac{5L^3}{6EI} y_2$  {E1.2b}

Con el mismo razonamiento se tiene  $y_2 = (-m \ddot{y}_1) f_{21} - K y_2 f_{22}$ ; siendo:

$f_{21}$  = flecha producida en ②, con una fuerza unidad aplicada en ① (figura E1.2g):

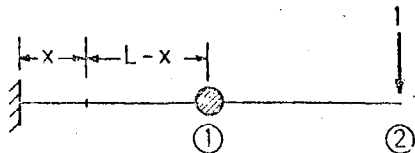


Fig. E1.2f

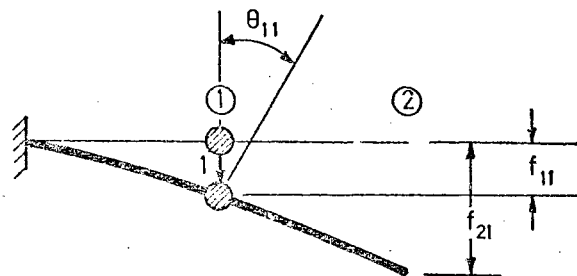


Fig. E1.2g

$f_{22}$  = flecha producida en ②, con una fuerza unidad aplicada en ② (figura E1.2h)

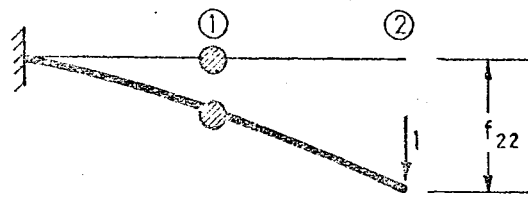


Fig. E1.2 h

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} ; \theta_{11} = \int_0^L \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (L-x) dx = \frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{21} = f_{11} + \theta_{11}L = \frac{L^3}{3EI} + \frac{L^3}{2EI} = \frac{5L^3}{6EI} = f_{21} = f_{12}$$

$$f_{22} = \frac{(2L)^3}{3EI} = \frac{8L^3}{3EI}$$

luego se tiene:

$$y_2 = -m \cdot \frac{5L^3}{6EI} \ddot{y}_1 - K \frac{8L^3}{3EI} y_2$$

y despejando  $y_2$  queda:

$$y_2 = - \frac{5mL^3}{2[3EI+8KL^3]} \ddot{y}_1$$

sustituyendo ahora en la ecuación {E1.2b} se obtiene:

$$y_1 = - \frac{mL^3}{3EI} \ddot{y}_1 + \frac{5KL^3}{6EI} \cdot \frac{5mL^3}{2[3EI+8KL^3]} \ddot{y}_1$$

y agrupando de forma análoga a {E1.2a} se tiene:

$$\underbrace{\frac{12EI m + 7KL^3}{12EI \left(1 + \frac{8KL^3}{3EI}\right)}}_{m^*} \ddot{y}_1 + \underbrace{\frac{3EI}{L^3}}_{K^*} \ddot{y}_1 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{K^*}{m^*} = \frac{EI}{mL^3} \cdot \frac{3 + \frac{8KL^3}{EI}}{1 + \frac{7KL^3}{12EI}}$$

luego la frecuencia del sistema es:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{mL^3} \cdot \frac{3 + \frac{8KL^3}{EI}}{1 + \frac{7KL^3}{12EI}}}$$

### EJERCICIO E1.3

En la estructura plana de la figura E1.3a, la pieza OABC es infinitamente rígida con una masa total  $M$  uniformemente distribuida.

Por otra parte, la barra BD está biempotrada en sus extremos y se supone sin masa, pero elongable y flexible (Inercia  $I$ , Area  $A$  y Módulo de Elasticidad  $E$ ).

Determinar:

- 1).- Grados de libertad de la estructura.
- 2).- Ecuación del movimiento de las vibraciones libres.
- 3).- Frecuencia fundamental.

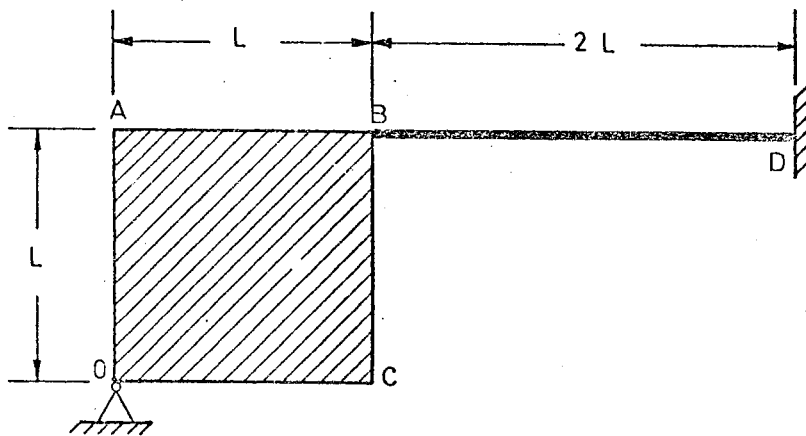


Fig. E1.3a



1).- La estructura tiene un grado de libertad que es el giro respecto a 0 como se ve en la figura E1.3b

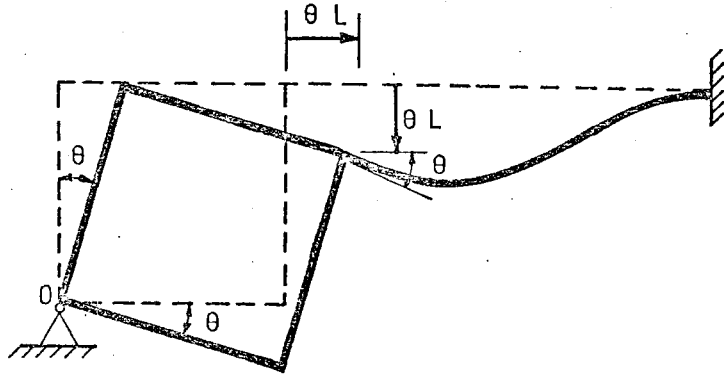
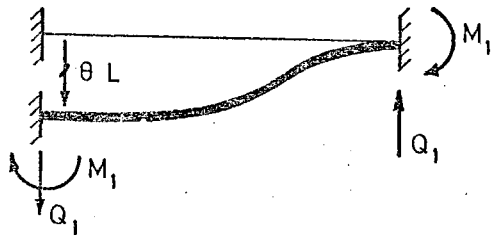


Fig. E1.3 b

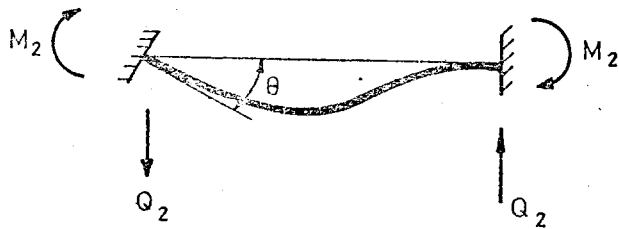


$$\frac{N \cdot 2L}{EA} = \delta = \theta L \rightarrow N = \frac{EA}{2} \theta$$



$$M_1 = \frac{6EI}{4L^2} \cdot \theta L = \frac{3EI}{2L} \theta$$

$$Q_1 = \frac{12EI}{8L^3} \cdot \theta L = \frac{3EI}{2L^2} \theta$$



$$M_2 = \frac{4EI}{2L} \cdot \theta = \frac{2EI}{L} \theta$$

$$Q_2 = \frac{6EI}{4L^2} \cdot \theta = \frac{3EI}{2L} \theta$$

Fig. E1.3c

Figura E1.3c

$$M = M_1 + M_2 = \frac{3EI}{2L} \theta + \frac{4EI}{2L} \theta = \frac{7EI}{2L} \theta \quad ; \quad Q = Q_1 + Q_2 = \frac{3EI}{2L^2} \theta + \frac{3EI}{2L^2} \theta = \frac{3EI}{L^2} \theta$$

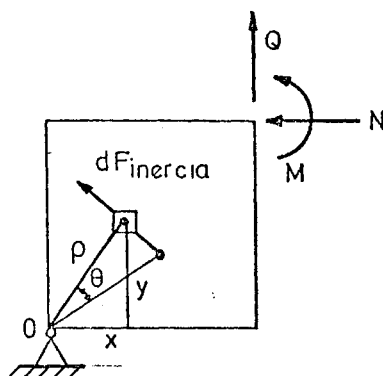


Fig. E1.3 d

Si se tiene en cuenta la figura E1.3d la inercia de rotación elemental es:  $-d\Omega \rho^2 \ddot{\theta} = -d(I \alpha)$

La inercia total es:

$$\begin{aligned} -\ddot{\theta} \int_0^L \int_0^L (x^2 + y^2) dx dy &= -\ddot{\theta} \int_0^L dx \int_0^L (x^2 dy + y^2 dy) = -\ddot{\theta} \int_0^L dx \left( x^2 L + \frac{L^3}{3} \right) = \\ &= -\ddot{\theta} \left\{ \frac{L^4}{3} + L \frac{L^3}{3} \right\} = -\frac{2L^4}{3} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

como se ha de cumplir que:  $\Sigma M_O - I \alpha = 0$  ; resulta que:

$$M + QL + NL + \frac{2L^4}{3} \ddot{\theta} = 0 \rightarrow \frac{2L^4}{3} \ddot{\theta} + \frac{7EI}{2L} \theta + \frac{3EI}{L} \theta + \frac{EAL}{2} \theta = 0$$

$$\boxed{\frac{2L^4}{3} \ddot{\theta} + \frac{1}{2L} (13EI + EAL^2) \theta = 0}$$

que es la ecuación del movimiento de las vibraciones libres.

3).-

$$\begin{aligned} k^* &= \frac{1}{2L} (13EI + EAL^2) \\ m^* &= \frac{2L^4}{3} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{13EI + EAL^2}{2L^4}} \cdot \frac{3}{2L}; \quad \boxed{\ddot{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2L^2 \sqrt{L}} \sqrt{13EI + EAL^2}} \end{aligned}$$

que es la pulsación fundamental.

EJERCICIO E1.4

En la estructura reticulada de la figura E1.4a, - el dintel tiene un peso total  $W$  y se supone infinitamente rígido. Los soportes son flexibles y su sección es rectangular de lados  $a$  y  $b$ .

La acción del viento se puede suponer, en este ejercicio, como una fuerza horizontal uniformemente repartida de valor máximo  $p$  y que varía a lo largo del tiempo según  $\text{sen} \omega t$ .

Determinar:

- 1).- Desplazamiento horizontal del dintel - en el instante  $t_0 = 10$  segundos.
- 2).- Expresiones de los esfuerzos en el empotramiento del soporte con la cimentación.

El material ofrece un módulo de elasticidad  $E$  y no se considera la deformación por cortante.

Datos numéricos:

$$\begin{aligned} W &= 100 \text{ t.} & L &= 24 \text{ m.} & h &= 10 \text{ m.} & a &= 0,40 \text{ m.} & b &= 0,60 \text{ m.} \\ E &= 2 \cdot 10^6 \text{ t.m}^{-2} & \omega &= 6 \text{ seg}^{-1} & p &= 1 \text{ t.m}^{-2} & t_0 &= 10 \text{ seg.} \end{aligned}$$

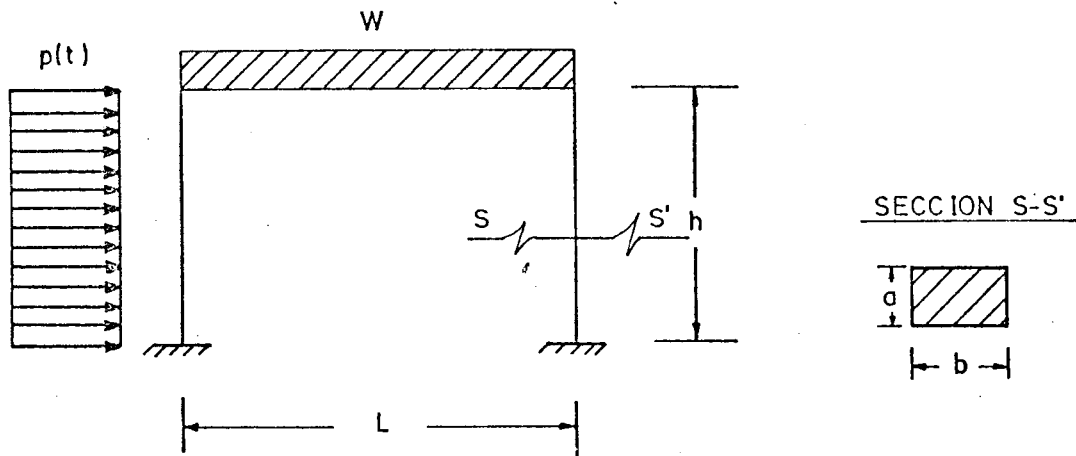


Fig. E1.4a

1).- Para la resolución se consideran los estados inicial y modal de la figura E1.4b.

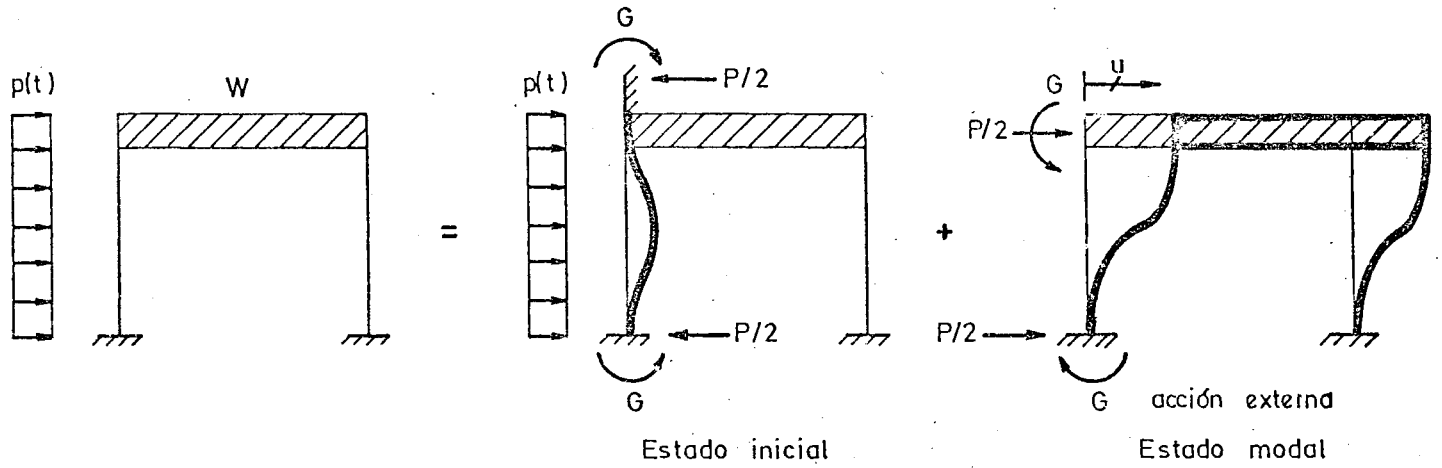


Fig. E1.4b

Aislando la masa  $M$  se tiene la figura E1.4c.

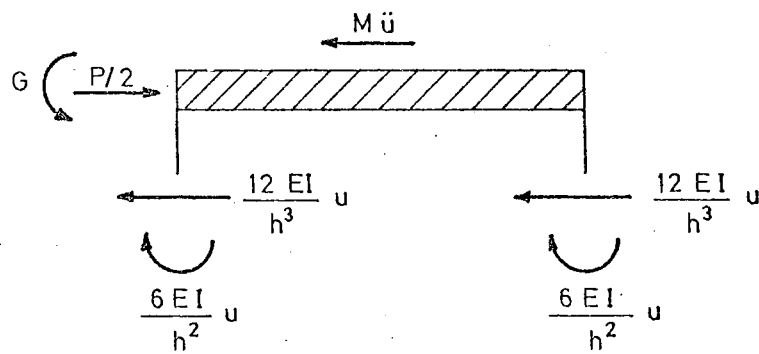


Fig. E1.4c

Planteando el equilibrio dinámico se tiene:

$$M\ddot{u} + Ku = \frac{P}{2}$$

donde:

$$M = \frac{W}{g}$$

$$k = \frac{24 \cdot EI}{h^3}$$

$$p = p \cdot \sin \omega t \cdot a \cdot h = 0,4 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \sin \omega t = 4 \cdot \sin \omega t$$

luego queda:

$$M\ddot{u} + Ku = 2 \cdot \sin \omega t$$

una solución de la ecuación diferencial es:

$$u_p = C \cdot \sin \omega t \quad (K - \omega^2 M) C \cdot \sin \omega t = 2 \cdot \sin \omega t$$

$$\dot{u}_p = C\omega \cdot \cos \omega t$$

$$\ddot{u}_p = C\omega^2 \cdot \sin \omega t$$

$$C = \frac{2}{K - \omega^2 M}$$

la función desplazamiento queda entonces:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cdot \cos \alpha t + B \cdot \sin \alpha t + \frac{2}{K - \omega^2 M} \sin \omega t \\ \dot{u} &= -A\alpha \sin \alpha t + B\alpha \cos \alpha t + \frac{2}{K - \omega^2 M} \cos \omega t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u(0) &= \dot{u}(0) = 0 \\ B + \frac{2\omega}{K - \omega^2 M} &= 0 \end{aligned}$$

$$A = 0$$

$$B = \frac{-2\omega}{\alpha (K - \omega^2 M)}$$

$$u(t) = \frac{2}{K - \omega^2 M} \left[ -\frac{\omega}{\alpha} \cdot \text{sen} \alpha t + \text{sen} \omega t \right]$$

$$K = \frac{24 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,4 \cdot 0,6^3}{10^3} = \frac{16 \cdot 6^3 \cdot 10^2}{10^3} = 345,6 \text{ m} \cdot \text{t}$$

$$M = \frac{W}{g} = \frac{100}{9,81} = 10,2 \text{ t/m/seg}^2$$

y la pulsación fundamental es:

$$\alpha = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{345,6}{10,2}} = 5,82 \text{ seg}^{-1} ; \quad \alpha = 5,82 \text{ seg}^{-1}$$

↓

no hay resonancia

$$u(10) = -0,0926 \left[ \frac{-6}{5,82} \cdot \text{sen} 58,2 + \text{sen} 60 \right] = 0,1234 \text{ m}; \quad \dot{u}(10) = 12,34 \text{ cm.}$$

2).- Debido a la solución modal, el esfuerzo tangencial es  $-\frac{12 \cdot E I}{4^3} u$  y debido a la inicial es  $\frac{P}{2}$ . El esfuerzo cortante total es pues:

$$Q(t) = \frac{k}{2} u + 2 \cdot \text{sen} \omega t = 16,5 \cdot \text{sen} 5,82 t - 16 \cdot \text{sen} 6 t + 2 \cdot \text{sen} 6 t$$

$$Q(t) = 16,5 \cdot \text{sen} 5,82 t - 14 \cdot \text{sen} 6 t$$

El flector debido a la solución inicial es  $G = \frac{P(t) \cdot 0,4 \cdot h^2}{12}$  y el debido a la solución modal es:  $\frac{6 E I \cdot u}{h^2}$ , luego el momento-

total final es:

$$M(t) = \frac{K \cdot h}{4} \cdot u + \frac{0,4 \cdot h}{12} \cdot \text{sen} \omega t$$

$$M(t) = 82,5 \text{ sen} 5,82t - 76,67 \text{ sen} 6t$$

EJERCICIO E1.5

En la figura E1.5a , los soportes esbeltos ( $EI = \text{cte.}$ ) están conectados rígidamente a una viga rígida de peso  $W$  . La base de los soportes experimenta un movimiento horizontal del cimiento  $u_f = S \cdot \sin(a \cdot t)$ , con  $S$  y  $a$  constantes. Si al pórtico estaba en reposo en el instante  $t = 0$  , se pide determinar el movimiento total no amortiguado de la viga en el instante  $t = \tau$  con  $\tau > 0$

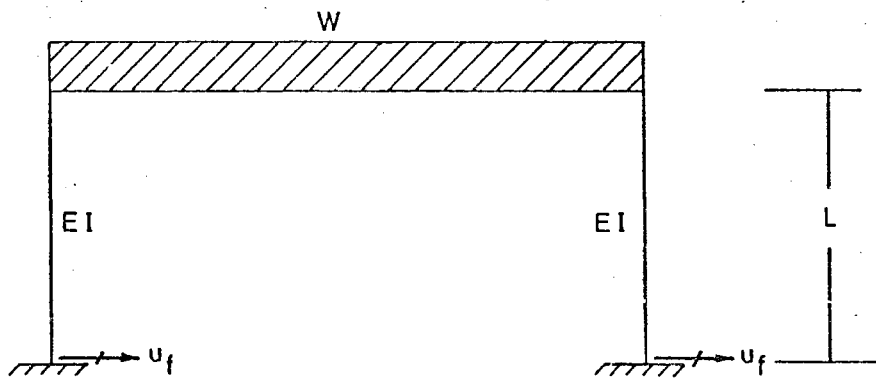


Fig. E1.5a



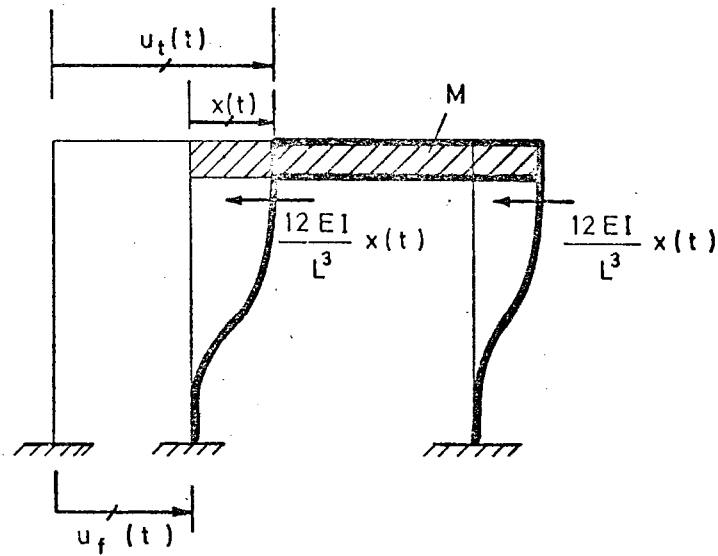


Fig. E1.5b

Ecuación en vibraciones libres.-

Equilibrio de fuerzas:

$$F_{\text{Inercia}} + F_{\text{Elásticas}} = 0 \quad \{E1.5a\}$$

en este caso se tiene (Figura E1.5b):

$$F_I = -M \frac{d^2 \text{espacio}}{dt^2} = -\frac{W}{g} \ddot{u}_t(t)$$

$$F_E = -K \cdot x = -\frac{24 \cdot EI}{L^3} \cdot x(t)$$

$u_t(t) = u_f(t) + x(t)$ ;  $\ddot{u}_t(t) = \ddot{u}_f(t) + \ddot{x}(t)$ ; Sustituyendo en {E1.5a} queda:

$$\frac{W}{g} \ddot{x}(t) + \ddot{u}_f(t) + \frac{24 \cdot EI}{L^3} \cdot x(t) = \begin{cases} u_f(t) = S \cdot \text{sen}(a \cdot t) \\ \dot{u}_f(t) = aS \cdot \text{cos}(a \cdot t) \\ \ddot{u}_f(t) = -a^2 S \cdot \text{sen}(a \cdot t) \end{cases}$$

$$\text{Luego; } \frac{W}{g} \ddot{x}(t) + \frac{24 \cdot EI}{L^3} x(t) = \frac{W}{g} a S \cdot \text{sen}(at) \quad \{E1.5b\}$$

la pulsación fundamental es:

$$\omega^2 = \frac{K}{M} = \frac{24 \cdot EI \cdot g}{W \cdot L^3} ; \quad \omega = \sqrt{\frac{24 \cdot EI \cdot g}{W \cdot L^3}}$$

Para resolver la ecuación diferencial {E1.5b} se considera la solución de la homogénea ( $X_H$ ) y la solución de la particular ( $X_P$ ):

$$\begin{cases} X_H = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \text{sen} \omega t \\ X_P = C \cdot \text{sen}(at) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X}_P = C \cdot a \cdot \cos(at) \\ \ddot{X}_P = -a^2 \cdot C \cdot \text{sen}(at) \end{cases}$$

entrando con  $X_P$  en E1.5b :

$$-M \cdot a^2 C \cdot \text{sen}(at) + K \cdot C \cdot \text{sen}(at) = a^2 \cdot M \cdot S \cdot \text{sen}(at); \quad C \frac{K - a^2 \cdot M}{a^2 \cdot M} = S$$

de donde  $C$  vale:

$$C = \frac{a^2 \cdot M \cdot S}{K - a^2 \cdot M}$$

Para calcular  $A$  y  $B$  hay que considerar las condiciones iniciales:

$$u_t(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \text{sen} \omega t + \frac{a^2 \cdot M \cdot S}{K - a^2 \cdot M} \cdot \text{sen}(at) + S \cdot \text{sen}(at)$$

$$\dot{u}_t(t) = -A \cdot \omega \cdot \text{sen} \omega t + B \cdot \omega \cdot \cos \omega t + a \left[ S + \frac{a^2 \cdot M \cdot S}{K - a^2 \cdot M} \right] \cdot \cos(at)$$

para  $t = 0$  se tiene: 
$$\begin{cases} u_t(0) = 0 \\ \dot{u}_t(0) = 0 \end{cases}$$

luego 
$$\begin{cases} A = 0 \\ B\omega + a \left[ S + \frac{a^2 \cdot M \cdot S}{K + a^2 \cdot M} \right] = 0 \end{cases} ; \quad B = \frac{-a \left[ S + \frac{a^2 \cdot M \cdot S}{K - a^2 \cdot M} \right]}{\omega}$$

luego, para  $t = \tau > 0$ , el movimiento total del pórtico es:

$$u_t(\tau) = -\frac{a}{\omega} \left[ S + \frac{a^2 \cdot M \cdot S}{K - a^2 \cdot M} \right] \text{sen}(\omega t) + S \left[ 1 + \frac{a^2 \cdot M}{K - a^2 \cdot M} \right] \text{sen}(at)$$

$$u_t(\tau) = S \left[ 1 + \frac{a^2 \cdot M}{K - a^2 \cdot M} \right] \left[ \text{sen}(at) - \frac{a}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega t) \right]$$

siendo:

$$M = \frac{W}{g}$$

$$K = \frac{24 \cdot EI}{L^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{24 \cdot EI \cdot g}{W \cdot L^3}}$$

EJERCICIO E2.1

En la estructura reticulada de la figura E2.1a - el dintel tiene un peso total  $W$  y se supone infinitamente-rígido. Los soportes son flexibles y extensibles y su sección es rectangular de lados  $a$  y  $b$ .

La acción del viento se puede suponer, en este ejercicio, como una fuerza horizontal uniformemente repartida de valor máximo  $P$  y que varía a lo largo del tiempo según  $\sin \omega t$ .

Se pide determinar la ecuación matricial de equilibrio dinámico

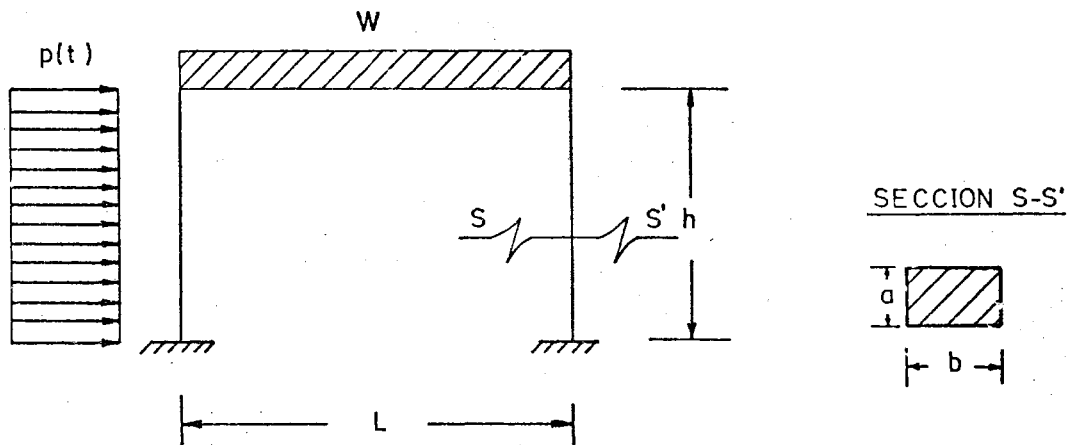


Fig. E2.1a

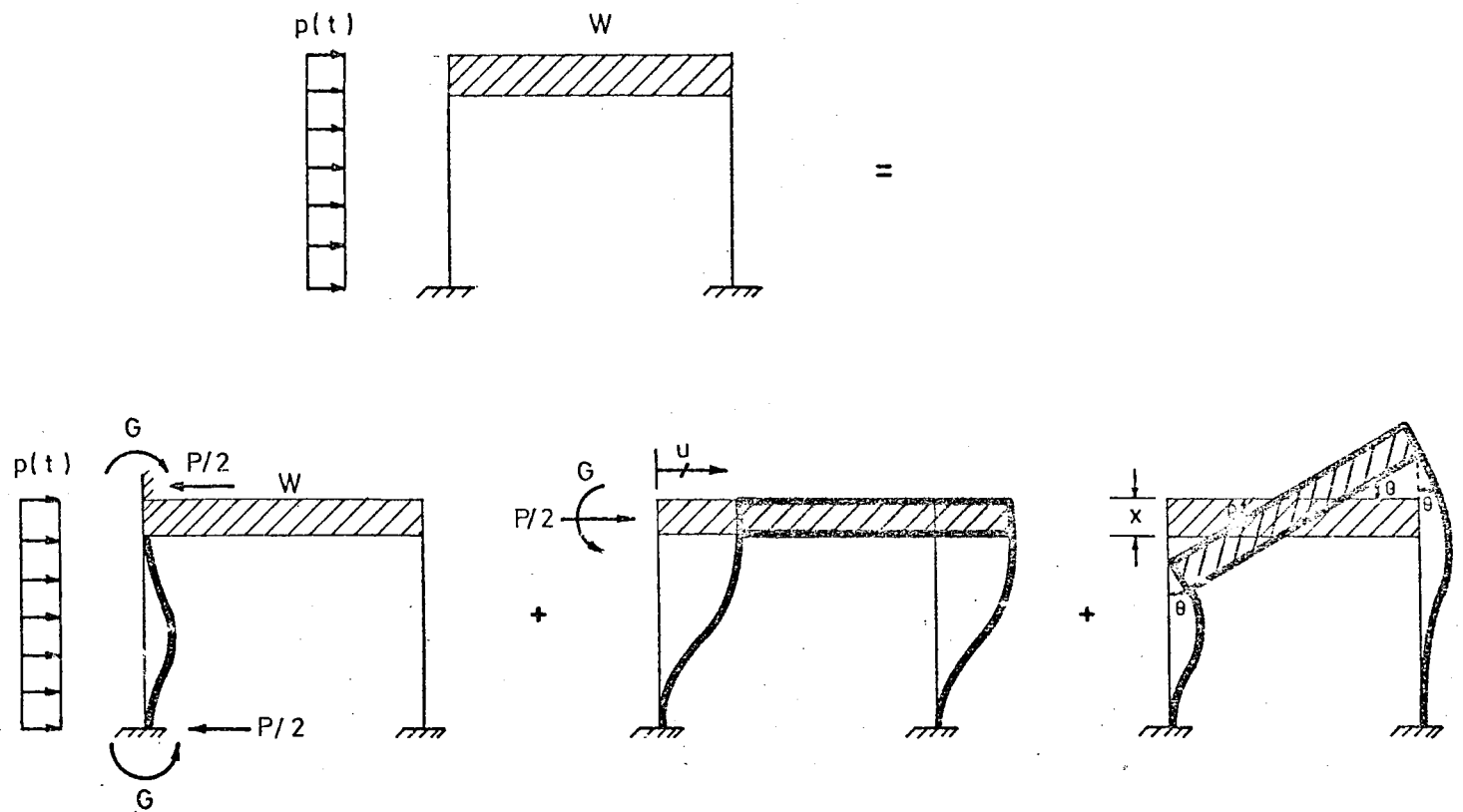


Fig. E 2.1 b

El ángulo  $\theta$  que se ve en la figura E2.1b depende del alargamiento acortamiento de los soportes. Como se considera el problema lineal  $\text{sen}\theta \approx \theta$  y la geometría de la estructura antes de deformar sirve para plantar la ecuación de equilibrio.

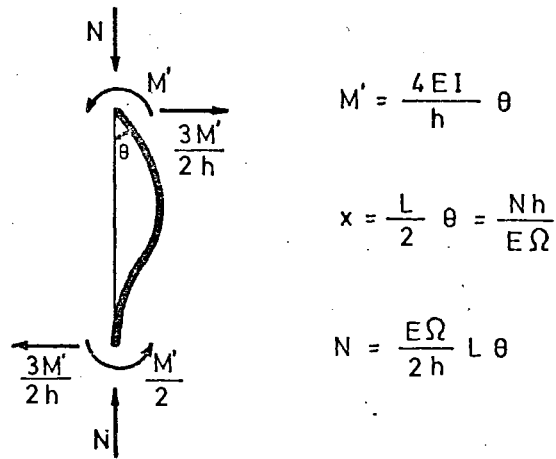


Fig. E2.1 c

Estableciendo el equilibrio dinámico y teniendo en cuenta los tres estados considerados, queda (ver figura-E2.1d)

$$\Sigma \cdot F_H = 0$$

$$\Sigma \cdot M_O = I \cdot \ddot{\theta}$$

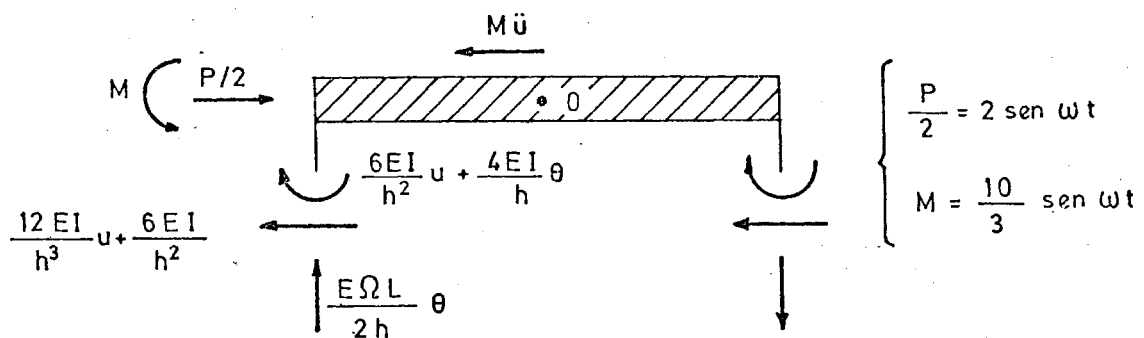


Fig. E2.1 d

Para el cálculo de  $I$  se tiene en cuenta la figura E2.1e:

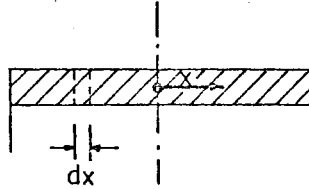


Fig. E2. 1e

$$dI = dm \cdot x^2 = \frac{W}{gL} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$I = \frac{W}{gL} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot dx = \frac{W}{gL} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{L^3}{\theta} + \frac{L^3}{\theta} \right]$$

$$I = \frac{WL^2}{12g}$$

$$\Sigma M_O \equiv \frac{10}{3} \cdot \text{sen} \omega t - \frac{12 \cdot EI}{h^2} \cdot u - \frac{8 \cdot EI}{h} \cdot \theta - \frac{E\Omega L^2}{2h} \cdot \theta = \frac{WL^2}{12g} \cdot \ddot{\theta}$$

$$\frac{WL^2}{12g} \cdot \ddot{\theta} + \frac{E\Omega L^2}{2h} + \frac{8 \cdot EI}{h} \cdot \theta + \frac{12 \cdot EI}{h^2} \cdot u = \frac{10}{3} \cdot \text{sen} \omega t$$

$$\Sigma F_H \equiv \frac{W}{g} \cdot \ddot{u} + \frac{24 \cdot EI}{h^3} \cdot u + \frac{12 \cdot EI}{h^2} \cdot \theta = 2 \cdot \text{sen} \omega t$$

$$\begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 \\ 0 & \frac{WL}{12g} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{24 \cdot EI}{h^3} & \frac{12 \cdot EI}{h^2} \\ \frac{12 \cdot EI}{h^2} & \frac{8 \cdot EI}{h} + \frac{E\Omega L^2}{2h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \text{sen} \omega t \\ \frac{10}{3} \cdot \text{sen} \omega t \end{bmatrix}$$

EJERCICIO E2.2

La estructura tipo torre de la figura E2.2a se supone constituida por una ménsula con dos masas  $M_1 = M_2 = 50 \text{ t} \cdot \text{seg}^2/\text{m}$ . Su sección es constante.

$$I = 8 \text{ m}^4$$

$$E = 3 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

Desde el nudo 2 se sitúa un cable horizontal -- que ejerce una fuerza de modo que el nudo 2 se desplace 4 cm. En un instante dado ( $t=0$ ), se supone que dicho cable se rompe. SE PIDE:

- Modos de la vibración y frecuencias de la misma.
- Desplazamiento horizontal del nudo 1 en el -- instante  $t = 10 \text{ seg}$ .

NOTA: Se desprecia la masa rotatoria de inercia.

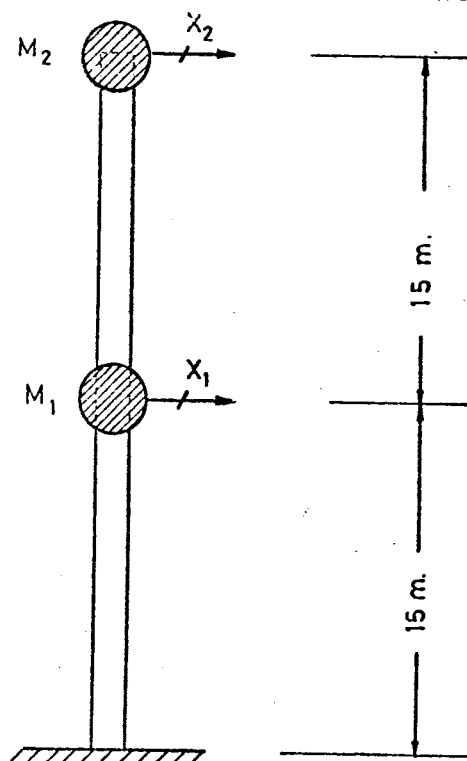


Fig. E2.2a



$$\left| \frac{1}{7m} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \frac{6 \cdot EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \frac{6 \cdot EI}{7mL^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 ; \frac{6 \cdot EI}{7mL^3} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 8}{7 \cdot 50 \cdot 15^3} = 121,9$$

$$\begin{vmatrix} 1950,5 - \omega^2 & -609,5 \\ -609,5 & 243,8 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4 - 2194,3\omega^2 - 104041,65 = 0 ; \omega^2 = \frac{2194,3 \pm \sqrt{2194,3^2 - 4 \cdot 104041,65}}{2}$$

$$\omega_1^2 = 48,49$$

$$\omega_2^2 = 2145,81$$

tomando la primera ecuación:  $(1950,5 - \omega^2) \cdot a_1 - 609,5 \cdot a_2 = 0$

$$\omega_1^2 = 48,49 ; 1902,01a_1 - 609,5a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3,1206 \end{cases} \rightarrow \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0,3052 \\ 0,9523 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^2 = 2145,81 - 195,31a_1 - 609,5a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -0,3204 \end{cases} \rightarrow \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0,9523 \\ 0,3052 \end{bmatrix}$$

a) FRECUENCIAS Y MODOS

$$\omega_1^2 = 48,49 \quad ; \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0,3052 \\ 0,9523 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^2 = 2145,81 \quad ; \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0,9523 \\ -0,3052 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{\Phi} \cdot \underline{q}(t) \quad ; \quad \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3052 & 0,9523 \\ 0,9523 & -0,3052 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

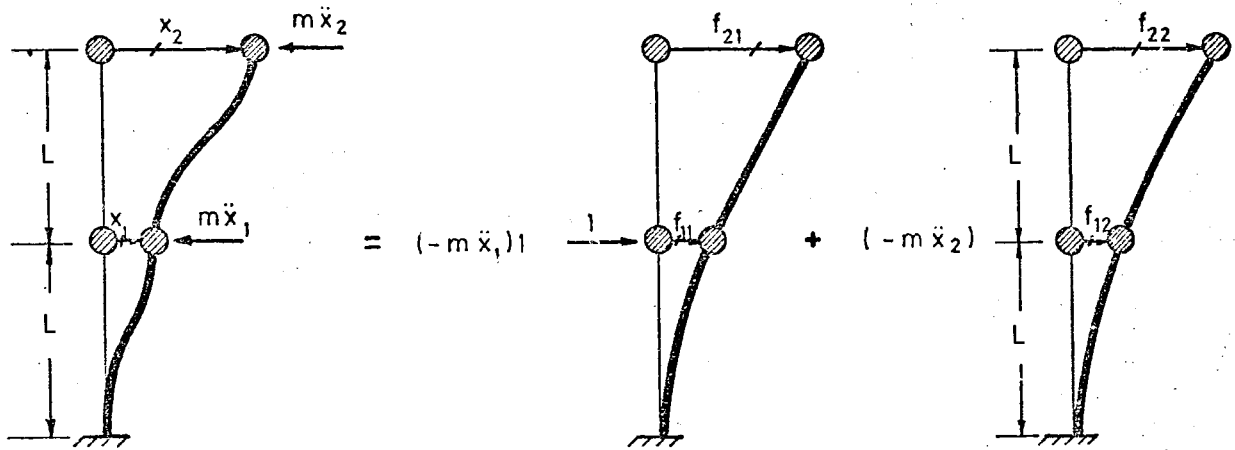


Fig. E 2.2 b

teniendo en cuenta la figura E2.2b se tiene:

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad ; \quad f_{12} = \frac{5L^3}{6EI}$$

$$f_{21} = \frac{5L^3}{6EI} \quad ; \quad f_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$$

$$x_1 = (-m \cdot \ddot{x}_1) \cdot f_{11} + (-m \cdot \ddot{x}_2) \cdot f_{12} = -\frac{2L^3}{6EI} \cdot m \cdot \ddot{x}_1 - \frac{5L^3}{6EI} \cdot m \cdot \ddot{x}_2$$

$$x_2 = (-m \cdot \ddot{x}_1) \cdot f_{21} + (-m \cdot \ddot{x}_2) \cdot f_{22} = -\frac{5L^3}{6EI} \cdot m \cdot \ddot{x}_1 - \frac{16L^3}{6EI} \cdot m \cdot \ddot{x}_2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{6EI}{L^3} \cdot \ddot{x}_1 &= -2 \cdot m \cdot \ddot{x}_1 - 5 \cdot m \cdot \ddot{x}_2 \\ \frac{6EI}{L^3} \cdot \ddot{x}_2 &= -5 \cdot m \cdot \ddot{x}_1 - 16 \cdot m \cdot \ddot{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{En forma matricial:}$$

$$m \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{6EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{E2.2a}$$

que es de la forma  $\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = \underline{0}$

$$M = m \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \quad ; \quad M^{-1} = \frac{1}{7m} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|M^{-1} \cdot K - \omega^2 \cdot I| = 0$$

siendo:

$$q_1(t) = A_1 \cdot \text{sen}(\sqrt{48,49} \cdot t) + B_1 \cdot \text{cos}(\sqrt{48,49} \cdot t)$$

$$q_2(t) = A_2 \cdot \text{sen}(\sqrt{2145,81} \cdot t) + B_2 \cdot \text{cos}(\sqrt{2145,81} \cdot t)$$

#### CONDICIONES DE CONTORNO O INICIALES

La velocidad al iniciarse el movimiento es nula:

$$\underline{\dot{u}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos iniciales son (Figura E2.2c):

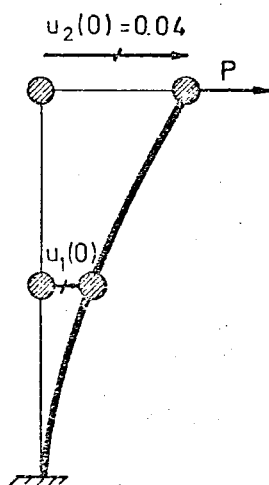


Fig. E2.2 c

$$u_2(0) = f_{22} \cdot P = 0,04$$

$$P = \frac{0,04}{f_{22}} = 0,04 \cdot \frac{3EI}{8L^3}$$

$$u_1(0) = f_{12} \cdot P = \frac{5L^3}{6EI} \cdot 0,04 \cdot \frac{3EI}{8L^3} = 0,0125 \text{ m}$$

$$\underline{u}(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,0125 \end{bmatrix} = \underline{\Phi} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q_1(0) &= B_1 \\ q_2(0) &= B_2 \end{aligned} \quad \underline{u}(0) = \begin{bmatrix} 0,3052 & 0,9523 \\ 0,9523 & -0,3052 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,0125 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} B_1 = 0,0241 \\ B_2 = 0,0343 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(0) &= \sqrt{48,49} \cdot A_1 \\ \dot{q}_2(0) &= \sqrt{2145,81} \cdot A_2 \end{aligned} \quad \underline{\dot{u}}(0) = \begin{bmatrix} 0,3052 & 0,9523 \\ 0,9523 & -0,3052 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{48,49} \cdot A_1 \\ \sqrt{2145,81} \cdot A_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

entonces:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3052 & 0,9523 \\ 0,9523 & -0,3052 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,0241 \cos(\sqrt{48,49} \cdot t) \\ 0,0343 \cos(\sqrt{2145,81} \cdot t) \end{bmatrix}$$

$$u_1(t) = [7,355 \cdot \cos(\sqrt{48,49} \cdot t) + 32,664 \cdot \cos(\sqrt{2145,81} \cdot t)] \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

para  $t = 10 \text{ seg.}$ :

$$\boxed{u_1(10) = 1,31 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \quad \xrightarrow{\quad} \text{(HACIA LA DERECHA)}$$

### EJERCICIO E2.3

La estructura de la figura E2.3a se puede estudiar desde el punto de vista dinámico como un sistema de dos grados de libertad (los desplazamientos verticales de las masas  $M_1$ ). Se supone la viga sin masa propia y se desprecia la inercia al giro de las masas  $M_1$ , así como que no existe amortiguamiento. SE PIDE:

- Ecuaciones del movimiento (Vibraciones libres).
- Supuestas las ecuaciones anteriores del tipo:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{0}$$

Determinar la respuesta del sistema dinámico - así como las frecuencias y modos de vibración.

Se supone:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } t=0.$$

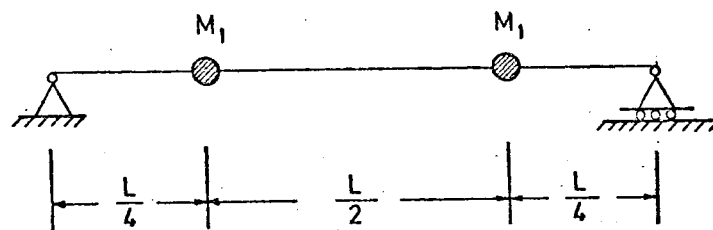


Fig. E2.3a

a).:

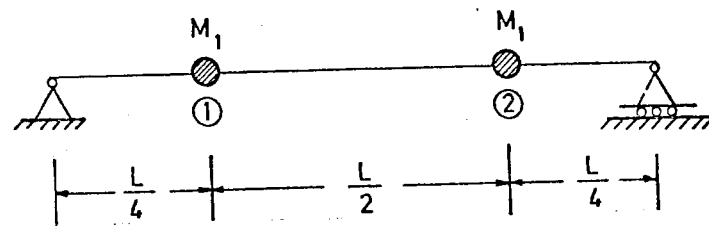


Fig. E2.3 b

Se llama  $K_{ij}$  a la fuerza que aparece en el grado de libertad  $i$ , cuando en el  $j$  se aplica un desplazamiento unidad. Se supone que los desplazamientos en los grados de libertad ① y ② son  $u_1$  y  $u_2$  respectivamente.

Debido a esos desplazamientos, las fuerzas que aparecen en ① y ② son:

$$\text{En } ① : K_{11} \cdot u_1 + K_{12} \cdot u_2$$

$$\text{En } ② : K_{21} \cdot u_1 + K_{22} \cdot u_2$$

Como se sabe  $K \cdot u = -M \cdot \ddot{u}$ , y equilibrando los grados de libertad ① y ②, se tiene:

$$K_{11} \cdot u_1 + K_{12} \cdot u_2 = -M_1 \cdot \ddot{u}_1$$

$$K_{21} \cdot u_1 + K_{22} \cdot u_2 = -M_1 \cdot \ddot{u}_2$$

Las ecuaciones del movimiento en vibraciones libres son:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) . . .

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} ; M^{-1} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,05 \\ -0,05 & 0,15 \end{bmatrix} ;$$

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,05 \\ -0,05 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,05 & -1,7 \\ -2,15 & 2,85 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| = 80$$

$$|M^{-1} \cdot K - \omega^2 \cdot I| = 0 ; \begin{vmatrix} 2,05 - \omega^2 & -1,7 \\ -2,15 & 2,85 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{llamando } \epsilon = \omega^2 : \\ \epsilon^2 - 4,90\epsilon + 2,1875 = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega_1^2 = 0,4968 \rightarrow \omega_1 = 0,7048$$

$$\omega_2^2 = 4,4032 \rightarrow \omega_2 = 2,0984$$

$\omega_1 = 0,7048$ FRECUENCIAS: $\omega_2 = 2,0984$
--



$$\begin{bmatrix} 2,05-\omega^2 & -1,7 \\ -2,15 & 2,85-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \left\{ \begin{array}{l} \text{Si se toma la segunda ecuación:} \\ -2,15 \cdot x_1 + (2,85-\omega^2) \cdot x_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega_1^2 = 0,4968 \rightarrow -2,15 \cdot x_1 + 2,3532 \cdot x_2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0,9136 \end{array} \right.$$

$$\text{módulo} = \sqrt{1^2 + 0,9136^2}$$

y normalizando:

$$\underline{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 0,7383 \\ 0,6745 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^2 = 4,4032 \rightarrow -2,15 \cdot x_1 - 1,5532 \cdot x_2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1,3842 \end{array} \right.$$

$$\text{módulo} = \sqrt{1^2 + 1,3842^2}$$

y normalizando:

$$\underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 0,5856 \\ -0,8106 \end{bmatrix}$$

MODOS:

$$\underline{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 0,7383 \\ 0,6745 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 0,5856 \\ -0,8106 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,7383 & 0,5856 \\ 0,6745 & -0,8106 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \cdot \text{sen} \cdot (0,7048t) + B_1 \cdot \text{cos} \cdot (0,7048t) \\ q_2 &= A_2 \cdot \text{sen} \cdot (2,0984t) + B_2 \cdot \text{cos} \cdot (2,0984t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_1(0) &= B_1 & \dot{q}_1(0) &= 0,7048 \cdot A_1 \\ q_2(0) &= B_2 & \dot{q}_2(0) &= 2,0984 \cdot A_2 \end{aligned} \right.$$

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8159 & 0,5895 \\ 0,6789 & -0,7432 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8159 & 0,5895 \\ 0,6789 & -0,7432 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8159 \\ 0,6789 \end{bmatrix} \\ \dot{\underline{u}}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7048A_1 \\ 2,0984A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8159 & 0,5895 \\ 0,6789 & -0,7432 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5895 \\ 0,7432 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= 0,816 \\ B_2 &= 0,679 \\ A_1 &= 0,836 \\ A_2 &= -0,354 \end{aligned} \right\}$$

La respuesta del sistema dinámico en función de los modos es:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7383 & 0,5856 \\ 0,6745 & -0,8106 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,836 \cdot \text{sen}(0,7048t) + 0,816 \cdot \text{cos}(0,7048t) \\ -0,354 \cdot \text{sen}(2,0984t) + 0,679 \cdot \text{cos}(2,0984t) \end{bmatrix}$$

# EJERCICIO E2.4

La estructura de la figura E2.4a se puede estudiar desde el punto de vista dinámico como un sistema de dos grados de libertad (los desplazamientos horizontales de las masas  $M_1$  y  $M_2$  de los dinteles). Se suponen éstos forjados de rigidez infinita e inextensibles. Los soportes tienen rigidez  $EI$  y se suponen inextensibles..

SE PIDE:

a) Ecuaciones del movimiento (Vibraciones libres)..

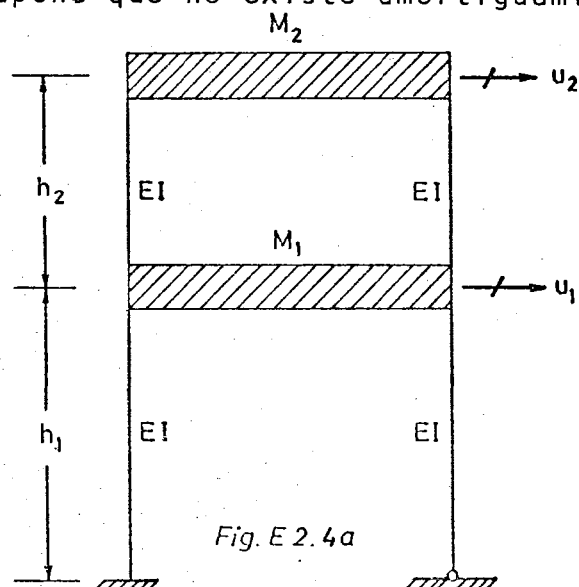
b) Supuesto

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{420}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } t=0$$

Determinar la respuesta del sistema dinámico, así como las frecuencias y modos..

Se supone que no existe amortiguamiento.



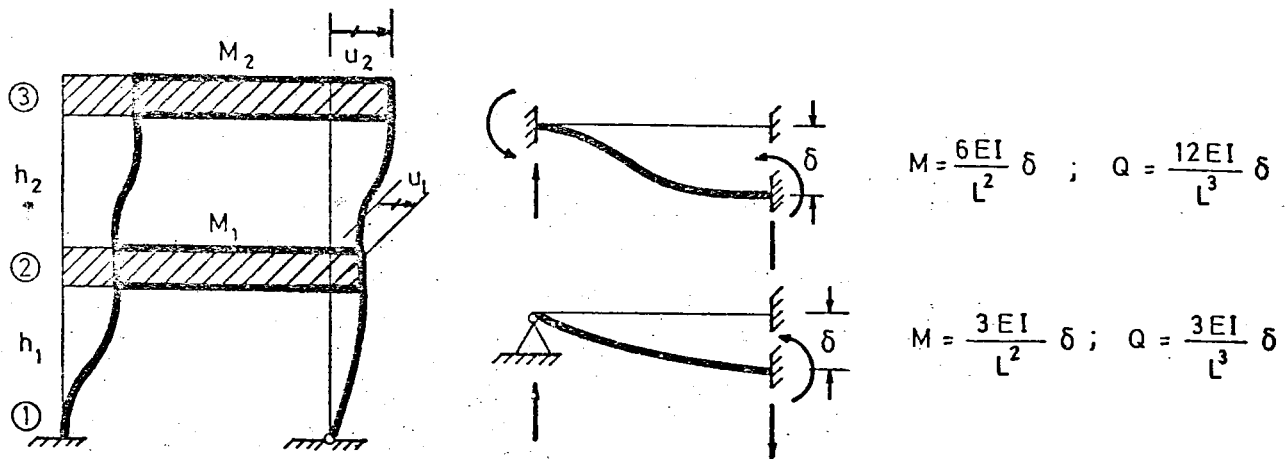


Fig. E2.4b

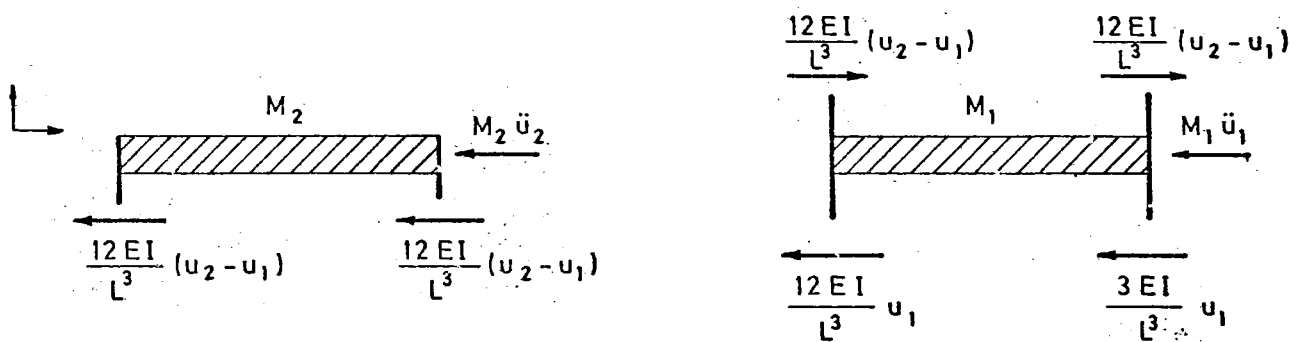


Fig. E2.4c

Considerando la figura E2.4b, se tiene:

$$M = \frac{6 \cdot EI}{L^2} \delta \quad ; \quad Q = \frac{12 \cdot EI}{L^3} \delta$$

$$M = \frac{3 \cdot EI}{L^2} \delta \quad ; \quad Q = \frac{3 \cdot EI}{L^3} \delta$$

Planteando el equilibrio:  $F_{\text{elásticas}} + F_{\text{inercia}} = 0$   
y a la vista de la figura E2.4c se tiene:

Grado de libertad 1:

$$-M_1 \cdot \ddot{u}_1 - \frac{12EI}{L^3} \cdot \ddot{u}_1 - \frac{3EI}{L^3} \cdot u_1 + \frac{24EI}{L^3} \cdot u_2 - \frac{24EI}{L^3} \cdot u_1 = 0$$

Grado de libertad 2:

$$-M_2 \cdot \ddot{u}_2 - \frac{24EI}{L^3} \cdot u_2 + \frac{24EI}{L^3} \cdot u_1 = 0$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-39EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^3} \\ \frac{24EI}{L^3} & \frac{-24EI}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{39EI}{L^3} & \frac{-24EI}{L^3} \\ \frac{-24EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

b)  $\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = 0$  ;  $|\underline{M}^{-1} \underline{K} - \omega^2 \underline{I}| = 0$

$$\underline{M} = \frac{1}{420} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -9 & 16 \end{bmatrix} ; |\Delta| = 175 ; \underline{M}^{-1} = \frac{420}{175} \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} = \frac{420}{175} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 547,2 & 326,4 \\ 412,8 & 393,6 \end{bmatrix}$$

$$|M^{-1} \cdot K - \omega^2 \cdot I| = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 547,2 - \omega^2 & 326,4 \\ 412,8 & 393,6 - \omega^2 \end{bmatrix} = 0 ;$$

llamando  $\epsilon = \omega^2$

$$(547,2 - \epsilon) \cdot (393,6 - \epsilon) - 412,8 \cdot 326,4 = 0$$

$$\epsilon^2 - 940,8\epsilon + 80640 = 0$$

$$\epsilon_1 = \omega_1^2 = 95,385 \rightarrow \omega_1 = 9,8$$

$$\epsilon_2 = \omega_2^2 = 845,415 \rightarrow \omega_2 = 29,08$$

$\omega_1 = 9,8 \text{ sg}^{-1}$ FRECUENCIAS: $\omega_2 = 29,08 \text{ sg}^{-1}$
--

$$\begin{bmatrix} 547,2 - \omega^2 & 326,4 \\ 412,8 & 393,6 - \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 ;$$

Si se toma la segunda ecuación:  $412,8 \cdot x_1 + (393,6 - \omega^2) \cdot x_2 = 0$

$$\omega_1^2 = 95,385 \rightarrow 412,8 \cdot x_1 + 298,215 \cdot x_2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1,384 \end{cases}$$

Normalizando:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0,5857 \\ -0,8106 \end{bmatrix}$$

$$\text{módulo} = \sqrt{1^2 + 1,384^2}$$

$$\omega_2^2 = 845,415 \rightarrow 412,8 \cdot x_1 - 451,815 \cdot x_2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0,9136 \end{cases}$$

$$\text{módulo} = \sqrt{1^2 + 0,9136^2}$$

Normalizando:

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0,7383 \\ 0,6745 \end{bmatrix}$$

MODOS: $\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0,5857 \\ -0,8106 \end{bmatrix}$ " $\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0,7383 \\ 0,6745 \end{bmatrix}$
---

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,5857 & 0,7383 \\ -0,8106 & 0,6745 \end{bmatrix}$$

Se comprueba que  $\Phi^T \cdot M \cdot \Phi$  y  $\Phi^T \cdot K \cdot \Phi$  son matrices diagonales:

$$\Phi^T \cdot M \cdot \Phi = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 0,5857 & -0,8106 \\ 0,7383 & 0,6745 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5857 & 0,7383 \\ -0,8106 & 0,6745 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{420} \begin{bmatrix} 24,55 & 0 \\ 0 & 7,04 \end{bmatrix} \text{ DIAGONAL}$$

$$\Phi^T \cdot K \cdot \Phi = \begin{bmatrix} 0,5857 & -0,8106 \\ 0,7383 & 0,6745 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5857 & 0,7383 \\ -0,8106 & 0,6745 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5,575 & 0 \\ 0 & 14,165 \end{bmatrix} \text{ DIAGONAL}$$

si se hace el cambio:..

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = A_1 \cdot \cos \omega_1 \cdot t + B_1 \cdot \sen \omega_1 \cdot t ; \quad q_1(t) = A_1 \cdot \cos(9,8t) + B_1 \cdot \sen(9,8t)$$

$$q_2 = A_2 \cdot \cos \omega_2 \cdot t + B_2 \cdot \sen \omega_2 \cdot t ; \quad q_2(t) = A_2 \cdot \cos(29,08t) + B_2 \cdot \sen(29,08t)$$

$$q_1(0) = A_1 \quad \dot{q}_1(0) = 9,8 B_1$$

$$q_2(0) = A_2 \quad \dot{q}_2(0) = 29,08 B_2$$

$$u(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5857 & 0,7383 \\ -0,8106 & 0,6745 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{u}(0) = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5857 & 0,7383 \\ -0,8106 & 0,6745 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9,8 B_1 \\ 29,08 B_2 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz  $\phi$  :

$$\phi^{-1} = \begin{bmatrix} 0,6789 & -0,7431 \\ 0,8159 & 0,5895 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6789 & -0,7431 \\ 0,8159 & 0,5859 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6789 \\ 0,8159 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9,8 B_1 \\ 29,08 B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6789 & -0,7431 \\ 0,8159 & 0,5859 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0642 \\ 1,4054 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \boxed{\begin{array}{l} A_1 = 0,679 \\ A_2 = 0,816 \\ B_1 = -0,0066 \\ B_2 = 0,0048 \end{array}}$$



La respuesta del sistema dinámico es:

$$q_1(t) = 0,679 \cdot \cos(9,8t) - 0,0066 \cdot \operatorname{sen}(9,8t)$$

$$q_2(t) = 0,816 \cdot \cos(29,08t) - 0,0048 \cdot \operatorname{sen}(29,08t)$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5857 & 0,7383 \\ -0,8106 & 0,6745 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

EJERCICIO E2.5

La viga biapoyada de la figura E2-5a es de hormigón con un módulo de elasticidad  $E = 200.000 \text{ kg.cm}^{-2}$  y sobre ella actúan tres masas, cuyos pesos son,  $W_1 = 30 \text{ t}$ .

Se pide:

Plantear la ecuación algebraica que permite el cálculo de la frecuencia fundamental de las vibraciones libres.

Nota: La viga se supone sin masa propia y tiene un ancho constante  $b=1,00 \text{ m}$ . No se considerará amortiguamiento.

Se tomarán como grados de libertad los desplazamientos verticales de las masas concentradas.

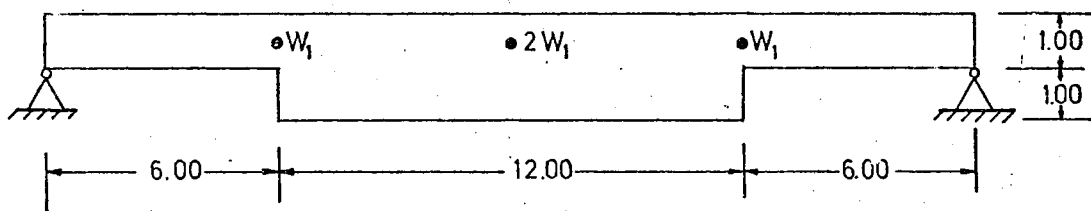
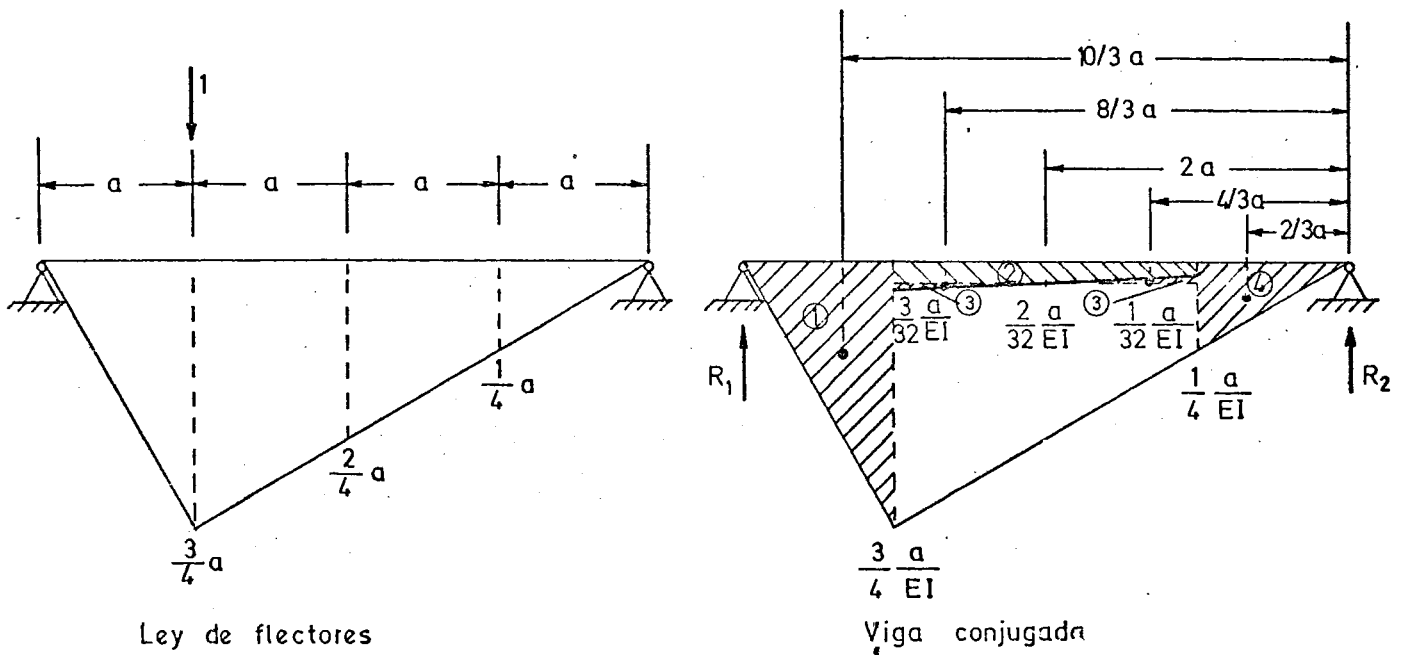


Fig. E2.5a



Tramos laterales  $I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} m^4$

Tramo central  $I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{8}{12} m^4$

Fig. E2.5 b

Teniendo en cuenta la figura E2.5b se tiene:

$$P_1 = \frac{3}{8} \frac{a^2}{EI}$$

$$R_1 = \left( \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{a^2}{4EI} + \frac{1}{64} \frac{a^2}{EI} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$P_2 = \frac{1}{8} \frac{a^2}{EI}$$

$$= \frac{60 + 12 + 4 + 1}{64 \cdot 3} \cdot \frac{a^2}{EI}$$

$$P_3 = \frac{1}{64} \frac{a^2}{EI}$$

$$R_1 = \frac{77}{64 \cdot 3} \frac{a^2}{EI}$$

$$P_4 = \frac{1}{8} \frac{a^2}{EI}$$

$$R_2 = \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{77}{64 \cdot 3} \right) \cdot \frac{a^2}{EI} = \frac{43 \cdot a^2}{64 \cdot 3 \cdot EI}$$

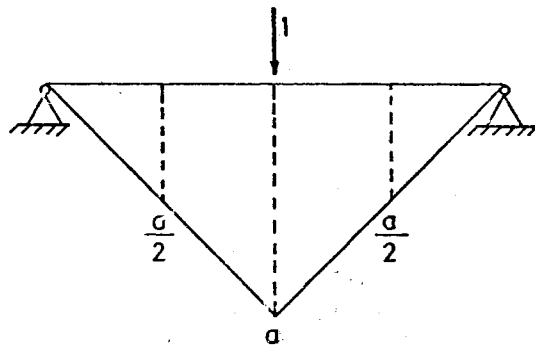
Siendo  $f_{ij}$  la flecha que aparece en el grado de libertad  $i$  cuando en el  $j$  se aplica una fuerza unidad y nula en los demás grados de libertad se tiene:

$$f_{11} = \left( \frac{77}{64 \cdot 3} \cdot 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{a^3}{EI} = \frac{77 - 24}{64 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{EI} = \frac{53}{64 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{EI}$$

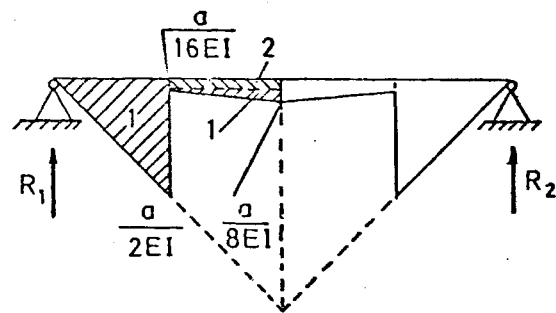
$$f_{12} = \left( \frac{77}{64 \cdot 3} \cdot 2 - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{64} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{154 - 96 - 6 - 2}{64 \cdot 3 \cdot EI} a^3 =$$

$$= \frac{50 \cdot a^3}{64 \cdot 3 \cdot EI}$$

$$f_{13} = \left( \frac{43}{64 \cdot 3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{a^3}{EI} = \frac{43 - 8}{64 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{EI} = \frac{34}{64 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{EI}$$



Ley de flectores



viga conjugada

Fig. E2. 5 c

$$P_1 = \frac{a^2}{4EI}$$

$$P_2 = \frac{a^2}{16EI}$$

$$P_3 = \frac{a^2}{32EI}$$

$$R_1 = R_2 = \frac{8+2+1}{32} \cdot \frac{a^2}{EI} = \frac{11}{32} \cdot \frac{a^2}{EI}$$

$$f_{21} = f_{23} = \left( \frac{11}{32} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{a^3}{EI} = \frac{66 - 16}{64 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{EI} = \frac{50}{64 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{EI}$$

$$f_{22} = \left( \frac{11}{32} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{a^3}{EI} = \frac{132 - 64 - 6 - 2}{EI} \cdot a^3 = \frac{60}{EI} \cdot a^3$$

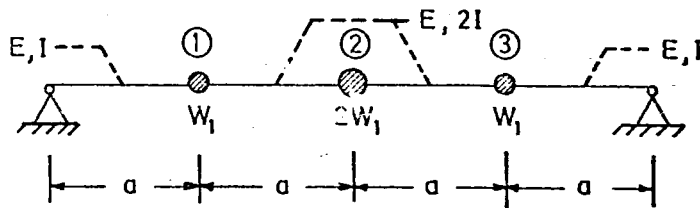


Fig. E2.5 d

De este modo, los desplazamientos totales en los grados de libertad (1), (2), (3), son:

$$x_1 = - \frac{W_1}{g} \cdot \ddot{x}_1 \cdot f_{11} - \frac{2W_1}{g} \cdot \ddot{x}_2 \cdot f_{12} - \frac{W_1}{g} \cdot \ddot{x}_3 \cdot f_{13}$$

$$x_2 = - \frac{W_1}{g} \cdot \ddot{x}_1 \cdot f_{21} - \frac{2W_1}{g} \cdot \ddot{x}_2 \cdot f_{22} - \frac{W_1}{g} \cdot \ddot{x}_3 \cdot f_{23}$$

$$x_3 = - \frac{W_1}{g} \cdot \ddot{x}_1 \cdot f_{31} - \frac{2W_1}{g} \cdot \ddot{x}_2 \cdot f_{32} - \frac{W_1}{g} \cdot \ddot{x}_3 \cdot f_{33}$$

$$0 \text{ sea: } \frac{W_1}{g} \cdot \frac{a^3}{192EI} \begin{bmatrix} 53 & 50 & 35 \\ 50 & 60 & 50 \\ 35 & 50 & 53 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Teniendo en cuenta que  $\ddot{X} = -\omega^2 \cdot X$

$$- \frac{W_1 \cdot a^3 \cdot \omega^2}{192 \cdot g \cdot EI} \begin{bmatrix} 53 & 100 & 35 \\ 50 & 120 & 50 \\ 35 & 100 & 53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \underline{0} ;$$

0 lo que es igual:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 53 & 100 & 35 \\ 50 & 120 & 50 \\ 35 & 100 & 53 \end{bmatrix} - \frac{192 \cdot g \cdot EI}{W_1 \cdot a^3 \cdot \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 ;$$

Si se llama:  $\lambda = \frac{192 \cdot g \cdot EI}{W_1 \cdot a^3 \cdot \omega^2}$  { E2.5a }

$$\begin{vmatrix} 53-\lambda & 100 & 50 \\ 50 & 120-\lambda & 50 \\ 35 & 100 & 53-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \{ E2.5b \}$$

De {E2.5b} salen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y entrando en {E2.5a} se obtiene  $\omega_1, \omega_2, \text{ y } \omega_3$ .

### EJERCICIO E3.1

En la viga voladizo de la figura E3.1a, de luz  $L$ , masa por unidad de longitud  $\rho$  y sección  $EI$  constante y sometida a flexión se pide:

a) Determinar las frecuencias y modos propios de vibración de la viga.

b) Determinar la ecuación de la flecha para vibraciones forzadas en el caso de la aplicación de una carga de intensidad  $g$  uniformemente distribuida sobre toda la viga en el instante  $t=0$  que se mantiene constante a lo largo del tiempo.

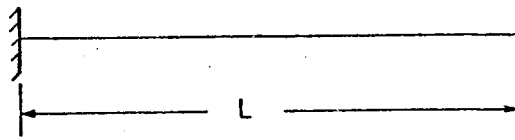


Fig. E3.1a

La ecuación dinámica es:

$$EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \quad \text{para } \begin{matrix} x \in (0, L) \\ t \in (0, \infty) \end{matrix}$$

Las condiciones de contorno (independientemente de  $t$ ) son:

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{"} \quad M_x = Q_x = 0$$

(para  $x = 0$ )      (para  $x = L$ )

Se supone una vibración armónica (libre):

$$\omega(x, t) = F(x) \sin(\omega t + \psi)$$

y resulta:

$$\frac{d^4 F}{dx^4} = \frac{\delta \cdot \omega^2}{EI} F \quad x \in (0, L)$$

$$F = \frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{para } x = 0$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{d^3 F}{dx^3} = 0 \quad \text{para } x = L$$

La solución general es:  $F = A_1 \operatorname{sh} \lambda x + A_2 \operatorname{ch} \lambda x + A_3 \operatorname{sen} \lambda x + A_4 \operatorname{cos} \lambda x$

con:  $\lambda^4 = \frac{\delta \cdot \omega^2}{EI}$

Al imponer las condiciones de contorno se obtiene:

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$A_1 \operatorname{sh} \lambda L + A_2 \operatorname{ch} \lambda L - A_3 \operatorname{sen} \lambda L - A_4 \operatorname{cos} \lambda L = 0$$

$$A_1 \operatorname{ch} \lambda L + A_2 \operatorname{sh} \lambda L - A_3 \operatorname{cos} \lambda L + A_4 \operatorname{sen} \lambda L = 0$$



Sistema homogéneo que tiene como soluciones distintas de la trivial los valores de  $\lambda$ , que hacen el determinante del sistema nulo:

$$\begin{bmatrix} 0 & L & 0 & 1 \\ 1 & 0 & L & 0 \\ \text{Sh } \lambda L & \text{Ch } \lambda L & -\text{sen } \lambda L & -\text{cos } \lambda L \\ \text{Ch } \lambda L & \text{Sh } \lambda L & -\text{cos } \lambda L & \text{cos } \lambda L \end{bmatrix} = 0$$

es decir:

$$\text{cos } \lambda L \cdot \text{Ch } \lambda L = -1$$

cuyas primeras soluciones son:

$$L \lambda_1 = 1,875 \quad L \lambda_2 = 4,694 \quad L \lambda_3 = 7,855 \quad L \lambda_4 = \alpha_n$$

y las correspondientes funciones son:

$$F_1 = 0,734. (\text{Sh } \lambda_1 x - \text{sen } \lambda_1 x) - (\text{Ch } \lambda_1 x - \text{cos } \lambda_1 x)$$

$$F_2 = 1,018. (\text{Sh } \lambda_2 x - \text{sen } \lambda_2 x) - (\text{Ch } \lambda_2 x - \text{cos } \lambda_2 x)$$

$$F_3 = 0,999. (\text{Sh } \lambda_3 x - \text{sen } \lambda_3 x) - (\text{Ch } \lambda_3 x - \text{cos } \lambda_3 x)$$

y los modos son:

$$\omega_n(x, t) = F_n(x) \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \phi) \quad \text{con} \quad \omega_n = \frac{\alpha_n^2}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

b) La carga es del tipo:

$$p(x, t) = p(x) \quad p(t) = g f(t)$$

donde  $g$  es constante y  $f(t)$  se representa en la figura-E3.1b

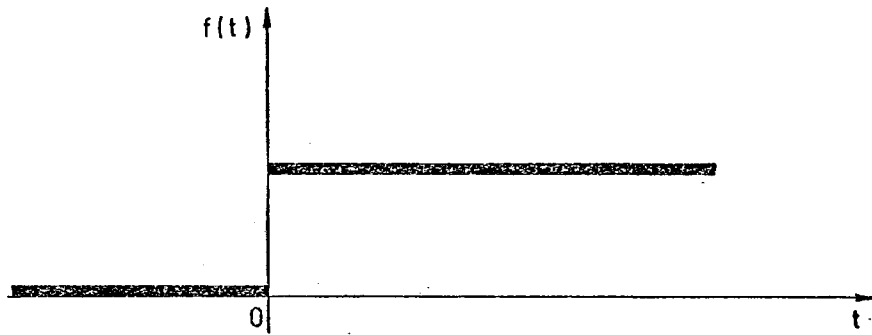


Fig. E3.1 b

La ecuación dinámica es:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \begin{matrix} x \in (0, L) \\ t \in (0, \infty) \end{matrix}$$

Las condiciones de borde son:

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x=0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^3} = 0 \quad \text{para } x=L$$

Las condiciones iniciales son:

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t = 0$$

se desarrolla en el espacio la flecha y la carga de la forma que sigue:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) Y_n(t)$$

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n F_n(x) "$$

donde:

$$g_n = \frac{\int_0^L p(x) F_n(x) dx}{\int_0^L F_n^2(x) dx}$$

Y resulta que  $g_n = -\frac{2g}{\lambda_n^4 L} (A_1)_n$  siendo  $(A_1)_n$  el valor del coeficiente  $A_1$  en la función n-sima de Rayleigh  $F_n(x)$ . Luego se tiene:

$$g_1 = -0,783 \text{ g} ; g_2 = -0,434 \text{ g} ; g_3 = -255 \text{ g} ; g_4 = -182 \text{ g} ; g_5 = -139 \text{ g}$$

Para el término n-simo se obtiene la ecuación diferencial:

$$EI F_n^{IV} Y_n + \rho F_n \ddot{Y}_n = g_n F_n f(t)$$

o equivalentemente:

$$EI \lambda_n^4 Y_n + \rho Y_n = g_n f(t)$$

$$\ddot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{g_n}{\rho} f(t) \quad \text{con} \quad \omega_n^2 = \lambda_n^4 \frac{EI}{\rho}$$

cuya solución es:  $Y_n = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + \frac{g_n}{EI \lambda_n^4}$

con las condiciones iniciales  $Y_n(0) = \dot{Y}_n(0) = 0$  resulta:

$$Y_n = \frac{g_n}{EI \lambda_n^4} (1 - \cos \omega_n t)$$

y la respuesta dinámica es:

$$\omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{EI \lambda_n^4} (1 - \cos \omega_n t) \cdot F_n(x)$$

la respuesta estática será:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{EI \lambda_n^4} F_n(x)$$

EJERCICIO E4.1

La placa de la figura E4.1a simplemente apoyada en todo su contorno está sometida a una carga de:

$$Z = 10 \cdot \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \sin \frac{3\pi y}{8} \cdot t \cdot m^{-2}$$

a) Determinar el máximo desplazamiento.

b) Si la placa está apoyada en un suelo elástico determinar su módulo de balasto, expresado en  $t \cdot m^{-3}$ , sabiendo que con la carga anterior los desplazamientos son un 25% de los producidos sin estar apoyada la placa en el suelo elástico.

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ t} \cdot m^{-2}$$

$$\nu = 0,2$$

$$h = 0,25 \text{ m}$$

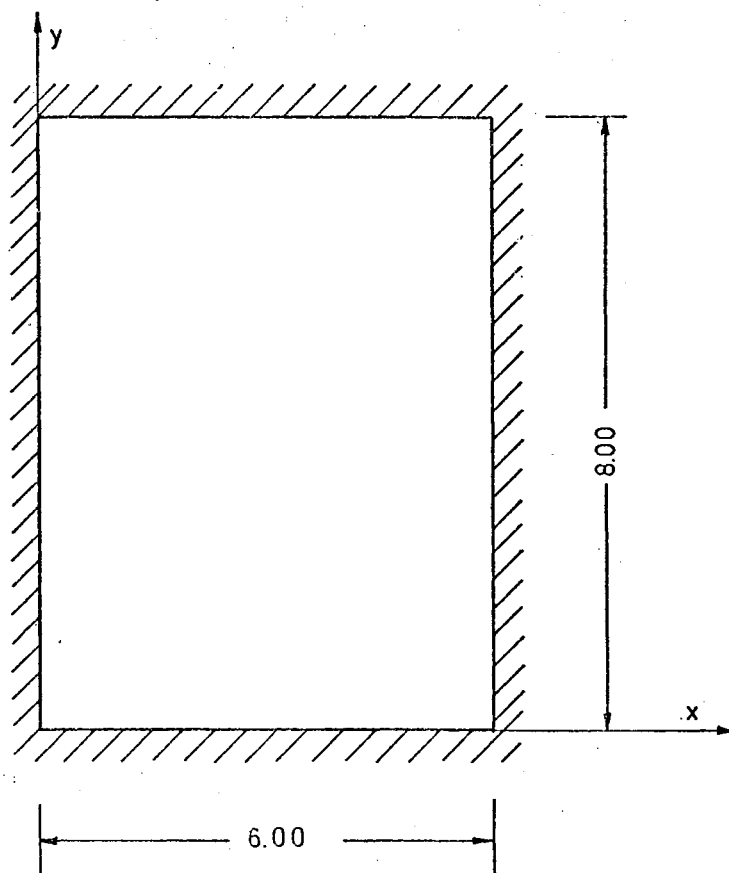


Fig. E4.1a

$$E = 2.10 \text{ t.m}^{-2}$$

$$\nu = 0,20$$

$$h = 0,25 \text{ m}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} = 2713$$

$$Z = 10 \cdot \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} \cdot y$$

Se supone un módulo de balasto K.

La ecuación diferencial es:

$$\nabla^4 \cdot W = \frac{2-h \cdot W}{D}$$

y W vale entonces:

$$W = W_{13} \cdot \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} \cdot y$$

$$W_{13} \left[ \left\{ \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 + \left( \frac{3\pi}{8} \right)^2 \right\} + \frac{k}{D} \right] = \frac{10}{2713} = 3,6864 \cdot 10^{-3}$$

$$W_{13} = \frac{3,6864 \cdot 10^{-3}}{2,7625 + \frac{k}{D}}$$

$$\text{a) Si } k=0 \quad W_{13} = 1,3345 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\text{b) Si } k \neq 0 \quad W_{13} = 0,25 \cdot 1,3345 \cdot 10^{-3} = 0,3336 \cdot 10^{-3}$$

$$0,3336 \cdot 10^{-3} = \frac{3,6864 \cdot 10^{-3}}{2,7625 + \frac{k}{D}} \quad \frac{k}{D} = \frac{3,6864}{0,3336} - 2,7625 = 8,2878$$

$$k = 22.485 \text{ t.m}^{-3}$$

EJERCICIO E4.2

La placa indicada en la figura E4.2a, simplemente apoyada en todo su contorno y en los puntos A y B, está sometida a una carga repartida de valor:

$$P(x,y) = 3,00 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{6,00} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{3,00} \quad \text{t.m}^{-2}$$

Las características de la placa son:

Espesor : 0,20 m.

$E = 300.000 \text{ kg/cm}^2$

$\nu = 0,20$

Determinar los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{xy}$  en el centro de la placa y las reacciones en los puntos A y B.

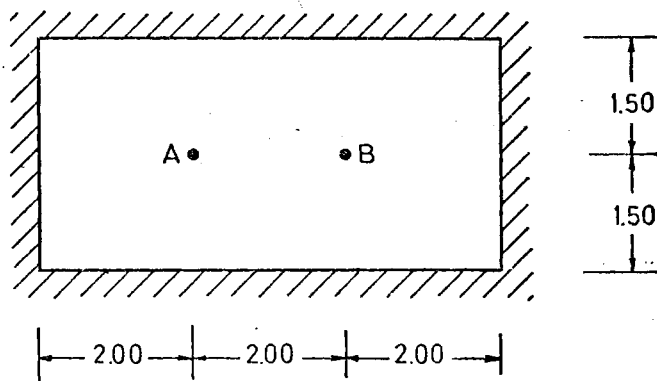


Fig. E4.2a

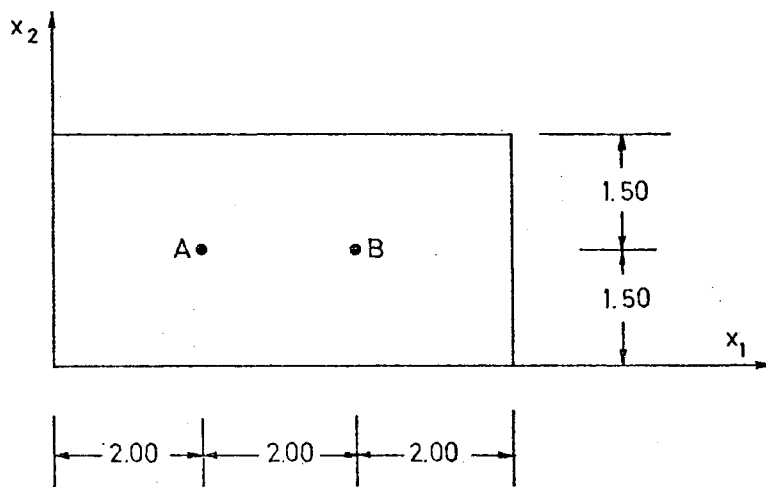


Fig. E2.4 b

Considerando la figura E4.2b se tiene:

$$Z(x,y) = 3 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} \quad t/m^2 \quad \left\{ \begin{matrix} m = 1 \\ n = 1 \end{matrix} \right. \rightarrow z_{11} = 3$$

La flecha debida a la capa uniforme es:

$$W_{11} = \frac{z_{11}}{D \left[ \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{3} \right)^2 \right]^2} = \frac{3}{D \left[ \frac{\pi^2}{36} + \frac{4\pi^2}{36} \right]^2} = \frac{3 \cdot 36^2}{D \cdot 25 \cdot \pi^4}$$

$$W_{c.u.} = \frac{3 \cdot 36}{25 \cdot \pi^4 \cdot D} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3}$$

Las flechas producidas a una carga puntual unidad en A y B son:

$$Z_{mn} = \frac{\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} Z(x_1, x_2) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi x_1}{L_1} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi x_2}{L_2} \cdot dx_1 \cdot dx_2}{\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sin^2 \frac{m \cdot \pi x_1}{L_1} \cdot dx_1 \cdot \sin^2 \frac{n \cdot \pi x_2}{L_2} \cdot dx_2}$$

Si se considera un sólo elemento del desarrollo de Fourier, se tiene:

Carga unidad en A:

$$Z_{11} = \frac{\sin \frac{\pi \cdot 2}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot 1,5}{3}}{\int_0^{L_1} \sin^2 \frac{\pi \cdot x_1}{L_1} \cdot dx_1 \int_0^{L_2} \sin^2 \frac{\pi \cdot x_2}{L_2} \cdot dx_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{\frac{L_1 \cdot L_2}{4}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$W_{11} = \frac{Z_{11}}{D \left[ \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{9} \right]^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0,9 \cdot 25 \cdot \pi^4}$$

La flecha debida a esta carga puntual en A es:

$$W(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0,9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3}$$

Para calcular las reacciones en los apoyos, hay que obligar a que las flechas en A y B sean nulas; ahora bien, la carga uniforme actuante es (figura E4.2c):

$$3 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3}$$



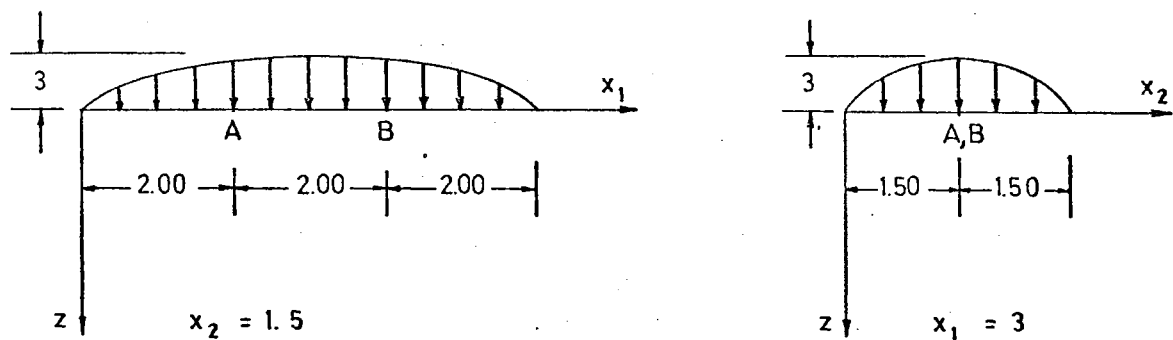


Fig. E4.2c

Debido a la simetría, las reacciones en A y B son iguales. Llamando  $f_{ij}$  a la flecha en i debido a la carga puntual unidad actuando en j :

$$f_{AA} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_{AB} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{4 \cdot \pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = f_{BA}$$

Para hallar la reacción  $R_A (=R_B) = X$

$$w = (w_{c.u})_A + X(f_{AA} + f_{AB}) = 0$$

$$\left[ \frac{3 \cdot 36}{0.25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} \right]_{\substack{x_1=2 \\ x_2=1,5}} = -2X \cdot f_{AA} = -2X \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 36}{0.9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{x_1}{6} \sin \frac{x_2}{3} \Bigg|_{\substack{x_1=2 \\ x_2=1,5}}$$

Ya se ve que el cálculo de X es independiente del punto A,B

Se se calcula la X expresada anteriormente, a la hora de hallar la flecha total (para posteriormente hallar  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{22}$ ) dicha flecha será

$$w = \underbrace{\left[ \frac{3.36}{D.25.\pi^4} + 2X. \frac{\sqrt{3}.36^2}{D.9.25.\pi^4} \right]}_0 \cdot \text{sen} \frac{\pi.x_1}{6} \cdot \text{sen} \frac{\pi.x_2}{3}$$

Y el paréntesis es igual a cero porque así se ha hecho al calcular la reacción en A ..

Esto sucede por haber tomado un sólo término del desarrollo de Fourier, con lo que el término  $\text{sen} \frac{\pi.x_1}{L_1} \cdot \text{sen} \frac{\pi.x_2}{L_2}$  es idéntico para la carga puntual y para la uniforme.

Se rehace el cálculo, tomando más términos del desarrollo en serie de Fourier para la carga puntual:

$$w_{c.u.} = \frac{3.36^2}{25.\pi^4.D} \cdot \text{sen} \frac{\pi.x_1}{6} \cdot \text{sen} \frac{\pi.x_2}{3}$$

Carga unidad en A :

$$z_{11} = \frac{\sqrt{3}}{9} \rightarrow w_{11} = \frac{\sqrt{3}.36^2}{D.9.25.\pi^4}$$

$$z_{12} = \frac{\text{sen} \frac{\pi.2}{6} \cdot \text{sen} \frac{2\pi.1,5}{3}}{\int_0^6 \text{sen}^2 \frac{\pi.x_1}{6} . dx_1 \int_0^3 \text{sen}^2 \frac{2.\pi.x_2}{3} . dx_2} = 0 \quad w_{12} = 0$$

$$z_{21} = \frac{\text{sen} \frac{2\pi.2}{6} \cdot \text{sen} \frac{\pi.1,5}{3}}{\int_0^6 \text{sen}^2 \frac{2\pi.x_1}{6} . dx_1 \int_0^3 \text{sen}^2 \frac{\pi.x_2}{3} . dx_2} = \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{6.3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$W_{21} = \frac{\sqrt{3}/9}{D \left[ \left( \frac{2\pi}{6} \right)^2 + \frac{\pi^2}{9} \right]^2} = \frac{\sqrt{3}}{9D \left[ \frac{4\pi^2}{36} + \frac{4\pi^2}{36} \right]^2} = \frac{\sqrt{3}}{9D \left[ \frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi^2}{9} \right]^2} =$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 9^2}{9 \cdot D \cdot 4} = \frac{9\sqrt{3}}{4 \cdot D}$$

$$W_{(p=1)A} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{D \cdot 9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} + \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot D} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3}$$

Carga unidad en B:

$$Z_{11} = \frac{\sin \frac{\pi \cdot 4}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot 1,5}{3}}{\frac{L_1 \cdot L_2}{4}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{9} ; W_{11} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{D \cdot 9 \cdot 25 \cdot \pi^4}$$

$$Z_{12} = 0$$

$$W_{12} = 0$$

$$Z_{21} = \frac{\sin \frac{2\pi \cdot 4}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot 1,5}{3}}{\int_0^6 \sin^2 \frac{2\pi \cdot x_1}{6} \cdot dx_1 \cdot \int_0^3 \sin^2 \frac{\pi \cdot x_2}{3} \cdot dx_2} = \frac{-\sqrt{3}/2}{\frac{6 \cdot 3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{9} ; W_{21} = \frac{-9 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot D}$$

$$W_{(p=1)B} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{D \cdot 9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} - \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot D} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3}$$

Ya ve que los términos añadidos se van a anular y - por lo tanto hay que seguir tomando más términos del desarrollo:.

$$Z_{22} = 0 \quad ; \quad Z_{31} = 0 \quad \text{en A y en B}$$

En A:

$$Z_{13} = \frac{\sin \frac{\pi \cdot 2}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot 1,5}{6}}{\frac{6 \cdot 3}{4}} = \frac{-\sqrt{3}/2}{\frac{6 \cdot 3}{4}} = \frac{-4\sqrt{3}}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{-\sqrt{3}}{9} \quad ; \quad W_{13} = \frac{-\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 37^2 \cdot \pi^4}$$

En B:

$$Z_{13} = \frac{\sin \frac{\pi \cdot 4}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot 1,5}{3}}{\frac{6 \cdot 3}{4}} = \frac{-\sqrt{3}}{9} \quad ; \quad W_{13} = \frac{-\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 37^2 \cdot \pi^4}$$

Con esto queda:

$$W_{(P=1)} A = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} + \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 0} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 37^2 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot x_2}{3}$$

$$W_{(P=1)} B = \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} - \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 0} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{0.9 \cdot 37^2 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot x_2}{3}$$

Obligando a que la flecha en A sea cero:

$$W_{c.u.} \Big|_A + X \left[ W_{(p=1)A} + W_{(p=1)B} \right]_A = 0$$

$$\frac{3 \cdot 36^2}{25 \cdot \pi^4 \cdot D} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + X \left[ \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{D \cdot 9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 - \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{D \cdot 9 \cdot 37^2 \cdot \pi^4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1) \cdot 2 \right] = 0$$

$$\frac{3 \cdot 36^2 \cdot \sqrt{3}}{25 \cdot \pi^4 \cdot D \cdot 2} + 1,96 X \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2 \cdot \sqrt{3}}{25 \cdot \pi^4 \cdot D \cdot 2 \cdot 9} = 0$$

$$X = 7,9392$$

Las reacciones son:

$$R_A = R_B = - 7,9392$$

La flecha total en cualquier punto de la placa es:

$$W = \frac{3 \cdot 36^2}{25 \cdot \pi^4 \cdot D} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} - 7,9392 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{D \cdot 9 \cdot 25 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} + 7,9392 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 36^2}{D \cdot 9 \cdot 37^2 \cdot \pi^4} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot x_2}{3}$$

$$W = \frac{36^2}{25 \cdot \pi^4 \cdot D} 0,0558 \left[ \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} + \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot x_2}{3} \right]$$

FLECHA TOTAL:

$$W = \frac{36^2 \cdot 0,03}{50 \cdot \pi^4 \cdot D} \left[ \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} + \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot x_2}{3} \right]$$

$$W_{,11} = -\frac{36^2 \cdot 0,03}{50 \cdot \pi^4 \cdot D} \cdot \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 \cdot \left[ \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} + \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot x_2}{3} \right] ;$$

$$W_{,11} \Big|_{\text{CENTRO}} = 0$$

$$W_{,22} = -\frac{36^2 \cdot 0,03}{50 \cdot \pi^4 \cdot D} \left[ \left( \frac{\pi}{3} \right)^2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{3} + \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{3\pi \cdot x_2}{3} \right] ;$$

$$W_{,22} \Big|_{\text{CENTRO}} = \frac{4 \cdot 36^2}{9 \cdot 25 \cdot \pi^2 \cdot D} = 0,0279$$

$$W_{,12} = \frac{36^2 \cdot 0,03}{50 \cdot \pi^4 \cdot D} \cdot \left( \frac{\pi}{6} \right) \cdot \left[ \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_2}{3} + \pi \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \cos \frac{3\pi \cdot x_2}{3} \right] ;$$

$$W_{,12} \Big|_{\text{CENTRO}} = 0$$

- Los momentos en el centro de la placa son:

$$m_{11} = -D(W_{,11} + \nu W_{,22}) = -D \cdot 0,20 \cdot \frac{4 \cdot 36^2 \cdot 0,03}{3 \cdot 25 \cdot \pi^2 \cdot D} = \frac{-0,8}{75} \cdot \left( \frac{36}{\pi} \right)^2 \cdot 0,0279$$

$$m_{22} = -D(W_{,22} + \nu W_{,11}) = -D \cdot 1 \cdot \frac{4 \cdot 36^2 \cdot 0,03}{3 \cdot 25 \cdot \pi^2 \cdot D} = \frac{-4}{75} \cdot \left( \frac{36}{\pi} \right)^2 \cdot 0,0279$$

$$m_{12} = -D(1-\nu) \cdot W_{,12} = 0$$

$$M_{xx}]_{\text{CENTRO}} = - 0,0391 \text{ m.t.}$$

$$M_{yy}]_{\text{CENTRO}} = - 0,1953 \text{ m.t.}$$

$$M_{xy}]_{\text{CENTRO}} = 0$$

$$\text{REACCION}]_A = \text{REACCION}]_B = - 7,9392 \text{ t.}$$

### EJERCICIO E4.3

La placa rectangular de la figura E4.3a de lados  $a$  y  $b$  y espesor  $h$ , simplemente apoyada en todo su contorno, se encuentra sometida a una carga triangular de valor máximo unitario  $p$  como se indica en la figura. Existe en el centro de la placa un soporte rectangular de lados  $a'$  y  $b'$  y longitud  $L$  empotrado en sus extremos.

SE PIDE:

- 1) Flecha de la placa suponiendo que no existe soporte central.
- 2) Flecha al considerar la existencia del soporte central.
- 3) Máxima tensión en el soporte.

El material de la placa y soporte ofrece un módulo de elasticidad  $E$  y un coeficiente de Poisson  $\nu$ .

A efectos de este ejercicio se considerarán las dimensiones  $a'$  y  $b'$  muy pequeñas respecto a los valores  $a$  y  $b$  de la placa y sólo se tendrán en cuenta los tres primeros términos significativos de Fourier.

DATOS NUMERICOS:

$$\begin{aligned} a &= 16 \text{ m} & b &= 12 \text{ m} & h &= 0,20 \text{ m} & p &= 4,0 \text{ t.m}^{-2} \\ a' &= 0,30 \text{ m} & b' &= 0,20 \text{ m} & L &= 10,00 \text{ m} & E &= 200000 \text{ kg.cm}^{-2} \\ \nu &= 0,20 \end{aligned}$$

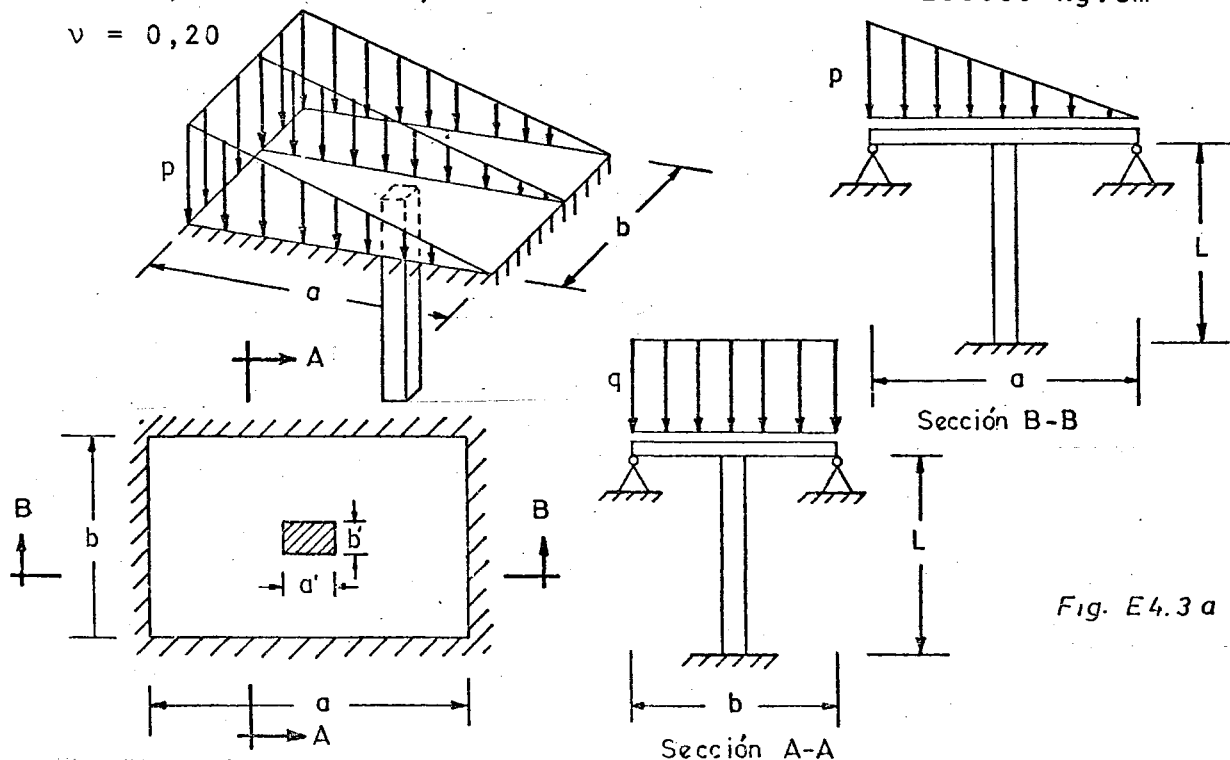


Fig. E4.3 a



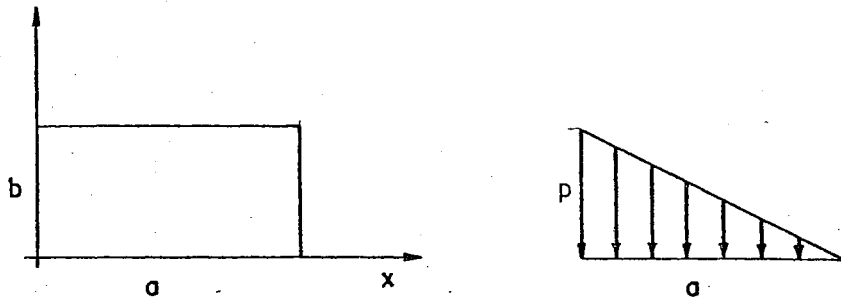


Fig. E4.3 b

Tomando los ejes de la figura E4.3b se tiene:

$$Z(x, y) = \frac{p}{a} (a - x)$$

$$I_{mn} = \int_0^a \int_0^b \frac{p}{a} (a - x) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{p}{a} \int_0^a (a - x) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} dx \cdot \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{p}{a} \left\{ \frac{a^2}{m\pi} \left[ -\cos \frac{m\pi x}{a} \right]_0^a - \underbrace{\int_0^a x \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} dx}_I \right\} \cdot \frac{b}{n\pi} \left[ -\cos \frac{n\pi y}{b} \right]_0^b$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin \frac{m\pi x}{a} \rightarrow dx ; \quad VV = \frac{-a}{m\pi} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \end{cases} \quad I = \frac{-a}{m\pi} \left[ x \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \right]_0^a + \frac{a}{m\pi}$$

$$\int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} dx$$

$$I = \frac{-a}{m\pi} (a \cdot \cos m\pi - 0) + \left( \frac{a}{m\pi} \right)^2 \left[ \sin \frac{m\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{-a^2}{m\pi} (-1)^m$$

$$I_{mn} = \frac{p}{a} \left\{ \frac{a^2}{m\pi} (-\cos m\pi + 1) + \frac{a^2}{m\pi} \cdot (-1)^m \right\} \cdot \frac{b}{n\pi} (-(-1)^n + 1) = \frac{pab}{mn\pi^2} \cdot$$

$$(-(-1)^m + 1 + (-1)^m) (1 - (-1)^n)$$

$$I_{mn} = \frac{pab}{mn\pi^2} (1 - (-1)^n) \longrightarrow \text{Cuando } n=\text{par} \quad I_{mn}=0 \quad \text{Por lo tanto:}$$

$$I_{11} = \frac{2pab}{\pi^2} ; \quad I_{21} = \frac{pab}{\pi^2} ; \quad I_{31} = \frac{2pab}{3 \cdot \pi^2} ; \quad I_{13} = \frac{2pab}{3 \cdot \pi^2}$$

$$Z_{mn} = \frac{4}{ab} I_{mn}$$

$$Z_{11} = \frac{8p}{\pi^2} ; \quad Z_{21} = \frac{4p}{\pi^2} ; \quad Z_{31} = \frac{8p}{3\pi^2} ; \quad Z_{13} = \frac{8p}{3\pi^2}$$

$$Z_{11} = 0,811 p ; \quad Z_{21} = 0,405 p ; \quad Z_{31} = 0,270 p ; \quad Z_{13} = 0,270 p$$

$$D = \frac{E \cdot h}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,20^3}{12(1-0,04)} = 1.388,89 ; \quad w_{mn} = \frac{Z_{mn}}{D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}$$

$$w_{11} = \frac{0,811 p}{1.388,89 \left[ \frac{9\pi^2}{16^2} + \frac{\pi^2}{12^2} \right]^2} = 0,051 p , \quad w_{21} = \frac{0,405 p}{D \left[ \frac{4\pi^2}{16^2} + \frac{\pi^2}{12^2} \right]^2} = 0,006 p$$

$$w_{31} = \frac{0,270 p}{1.388,89 \left[ \frac{9\pi^2}{16^2} + \frac{\pi^2}{12^2} \right]^2} = 0,001 p , \quad w_{13} = \frac{0,270 p}{D \left[ \frac{\pi^2}{16^2} + \frac{9\pi^2}{12^2} \right]^2} = 0,0005 p$$

$$W(x,y) = W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\theta_x(x,y) = \frac{m\pi}{a} \cdot W_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Por tanto, debido a la carga uniforme, la flecha y - el giro en el centro son, respectivamente:

$$W_0 = 0,051 p + 0,006 p \cdot 0 + 0,001 p \cdot (-1) + 0,0004 p \cdot (-1) = 0,0496 p = 0,198 \text{ m}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{16} (0,0051 p \cdot 0 + 2 \cdot 0,006 p \cdot (-1) + 3 \cdot 0,001 p \cdot 0 + 3 \cdot 0,0005 p \cdot 0) = -0,009 \text{ rad}$$

Debido a la carga unidad, en el centro, sólo hay flecha (el giro es cero por simetría):

$$Z_{mn} = \frac{4}{ab} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \alpha \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \beta \quad ; \text{ Para } \alpha = \frac{a}{2} \text{ y } \beta = \frac{b}{2} \text{ se obtiene:}$$

$$Z_{11} = \frac{4}{ab} = 0,021 \quad ; \quad Z_{13} = \frac{-4}{ab} = -0,021 \quad ; \quad Z_{31} = \frac{-4}{ab} = -0,021$$

$$W_{11} = \frac{0,021}{D \left[ \frac{\pi^2}{16^2} + \frac{\pi^2}{12^2} \right]^2} = 1,32 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad W_{13} = \frac{-0,021}{D \left[ \frac{\pi^2}{16^2} + \frac{9\pi^2}{12^2} \right]^2} = -0,035 \cdot 10^{-3}$$

$$W_{31} = \frac{-0,021}{D \left[ \frac{9\pi^2}{16^2} + \frac{\pi^2}{12^2} \right]^2} = 0,087 \cdot 10^{-3}$$

Por tanto, la flecha en el punto medio, debido a la carga unidad es:

$$W = 1,198 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Debido al momento unidad en el centro, sólo hay un giro (la flecha es cero por antimetría); el efecto del momento se obtiene a partir de la carga unidad, derivando respecto de  $\alpha$ :

$$Z_{mn} = \frac{4m\pi}{a^2b} \cos \frac{m\pi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi}{b} ; \text{ para } \alpha = \frac{a}{2} \text{ y } \beta = \frac{b}{2} \text{ se obtiene:}$$

$$Z_{21} = \frac{8\pi}{a^2b} (-1) = -8,18 \cdot 10^{-3} ; \quad Z_{23} = \frac{8\pi}{a^2b} \cdot 1 = 8,18 \cdot 10^{-3} ;$$

$$Z_{41} = \frac{16\pi}{a^2b} = 16,36 \cdot 10^{-3}$$

Por lo tanto, la flecha en el centro debida a la carga unidad es:

$$W(x,y) = \sum \frac{1}{D'} \left( \frac{4}{ab} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} \cdot \alpha \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \cdot \beta \right) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} \cdot x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \cdot y \Bigg]_{\alpha=x=\frac{a}{2}}$$

La flecha en el centro debida al momento unidad es:

$$W(x,y) = \sum \frac{1}{D'} \left( \frac{4m\pi}{a \cdot b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} \cdot \alpha \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \cdot \beta \right) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} \cdot x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \cdot y \Bigg]$$

Y por último, el giro en el centro debido al momento unidad:

$$\theta(x,y) = \sum \frac{1}{D'} \left( \frac{4m\pi}{a \cdot b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} \cdot \alpha \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \cdot \beta \right) \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} \cdot x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \cdot y \Bigg]_{\alpha=x=a/2}$$

$$\beta=y=b/2$$

Siendo:

$$D' = \frac{1}{D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}$$

$$\theta_{21} = \frac{-8,18 \cdot 10^{-3}}{D \left[ \left( \frac{2\pi}{16} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{12} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{2\pi}{16} \cdot (-1) = 46,61 \cdot 10^{-6}$$

$$\theta_{23} = \frac{8,18 \cdot 10^{-3}}{D \left[ \left( \frac{2\pi}{16} \right)^2 + \left( \frac{3\pi}{12} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{2\pi}{16} \cdot (-1) \cdot (-1) = 3,89 \cdot 10^{-6}$$

$$\theta_{41} = \frac{16,36 \cdot 10^{-3}}{D \left[ \left( \frac{4\pi}{16} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{12} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{4\pi}{16} = 19,69 \cdot 10^{-6}$$

El giro en el --  
centro debido al  
momento unidad -  
es:

$$\theta = 70,19 \cdot 10^{-6}$$

2) Si se considera el soporte central hay que igualar los desplazamientos de la placa y del soporte:

Flecha en el centro = acortamiento del pilar

$$0,198 - X \cdot 1,198 \cdot 10^{-3} = \frac{X \cdot L}{E \cdot \Omega} = \frac{10}{2 \cdot 10^6 \cdot 2,3 \cdot 10^{-2}} \cdot X = 0,083 \cdot 10^{-3} \cdot X :$$

$$X = 154,53 \text{ t}$$

Giro en el centro = flexión del pilar

$$0,009 - 70,19 \cdot 10^{-6} \cdot Y = \frac{Y \cdot L}{4 \cdot E I} = \frac{10}{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,20 \cdot 0,30^3} \cdot Y = 2,777,7 \cdot 10^{-6} Y$$

$$9 = 2,847,96 \cdot 10^{-3} \cdot Y$$

$$Y = 3,16 \text{ m.t}$$

Por lo tanto la flecha en el centro es:

$$W = 0,083 \cdot 10^{-3} X = 0,083 \cdot 10^{-3} \cdot 154,53 = 12,83 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

3) La máxima tensión en el soporte es:

$$\sigma_{\max} = \frac{Y}{I} \cdot \frac{b'}{2} + \frac{X}{\Omega} = \frac{3,16}{\frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,3^3} \cdot \frac{0,3}{2} + \frac{154,53}{0,2 \cdot 0,3} = 1.053,33 +$$

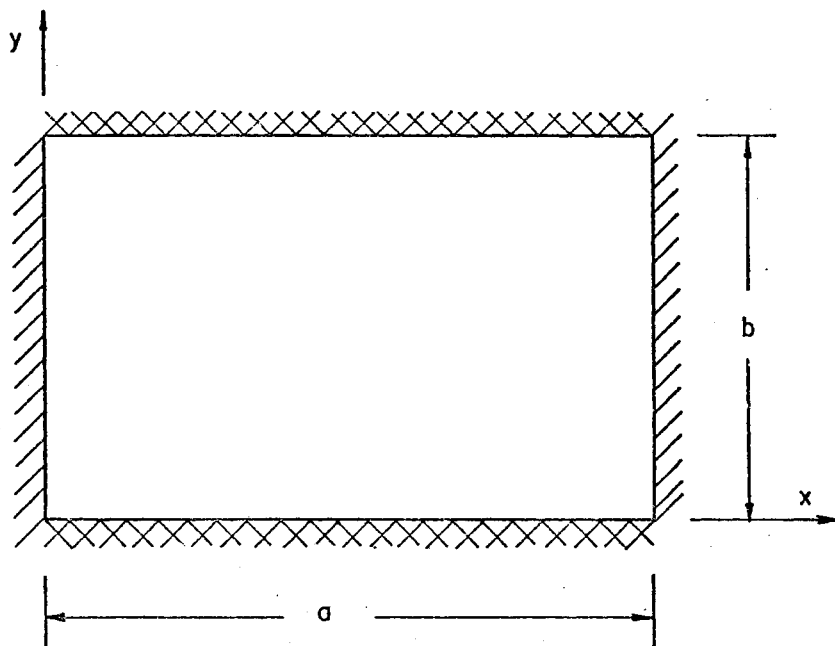
$$+ 2.575,5 = 3.629 \frac{t}{m^2}$$

$$\sigma_{\max} = 3.629 \frac{t}{m^2}$$

EJERCICIO E4.4

La placa rectangular de la figura E4.4a, de espesor  $h$ , lados  $a$  y  $b$ , módulo de elasticidad  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , está apoyada en dos extremos opuestos y empotrada en los dos. Se le somete a una carga sinusoidal  $p(x,y) = p_0 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{a}$

Determinar la flecha en el centro de la placa



//// //// simple apoyo  
XXXX XXXX empotramiento

Fig. E4.4 a

La ecuación general de la losa ortótropa es:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}, \text{ siendo:}$$

$$p(x,y) = p_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a}, \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

en las condiciones de contorno:

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{a lo largo de } y = 0 \quad \text{e } y = b$$

Se supone que  $\omega = F(y) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{a}$ , con lo que resulta:

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 F - 2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^4 F}{dy^4} = \frac{p_0}{D}$$

La solución de esta ecuación es ( $\pm \frac{\pi}{a}$  son raíces dobles de la ecuación característica):

$$F(y) = (A_1 y + A_2) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} y} + (A_3 y + A_4) \cdot e^{\frac{\pi}{a} y}$$

que se puede poner por conveniencia en la forma

$$F(y) = (C_1 \frac{\pi}{a} y + C_2) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} y} + (C_3 \frac{\pi}{a} (b-y) + C_4) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} (b-y)} + \frac{a^4}{\pi^4} \frac{p_0}{D}$$

Las derivadas sucesivas de esta función son:

$$F'(y) = \frac{\pi}{a} (-C_1 \frac{\pi}{a} y + C_1 - C_2) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} y} - \frac{\pi}{a} (-C_3 \frac{\pi}{a} (b-y) + C_3 - C_4) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} (b-y)}$$

$$F''(y) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (C_1 \cdot \frac{\pi}{a} y - 2C_1 + C_2) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} y} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (C_3 \cdot \frac{\pi}{a} (b-y) - 2C_3 + C_4) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} (b-y)}$$

$$F'''(y) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 (-C_1 \cdot \frac{\pi}{a} y + 3C_1 - C_2) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} y} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 (-C_3 \frac{\pi}{a} (b-y) + 3C_3 - C_4) \cdot e^{-\frac{\pi}{a} (b-y)}$$



Se denomina por comodidad  $\lambda = \pi \cdot \frac{b}{a}$  y se obtiene, entonces:

$$F(0) = c_2 + (c_3 \lambda + c_4) \cdot e^{-\lambda} + \frac{a^4 \cdot p_0}{\pi^4 \cdot D},$$

$$F(b) = (c_1 \lambda + c_2) \cdot e^{-\lambda} + c_4 + \frac{a^4}{\pi^4} \cdot \frac{p_0}{D}$$

$$F'(0) = \frac{\pi}{a} \left\{ c_1 - c_2 - \{(1-\lambda) \cdot c_3 - c_4\} \cdot e^{-\lambda} \right\},$$

$$F'(b) = \frac{\pi}{a} \left\{ \{c_1(1-\lambda) - c_2\} \cdot e^{-\lambda} - (c_3 - c_4) \right\}$$

Las condiciones de contorno se escriben en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \\ 1 & -1 & -(1-\lambda)e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 & 1 \\ (1-\lambda)e^{-\lambda} & -e^{-\lambda} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{a^4}{\pi^4} \cdot \frac{p_0}{D}$$

Eliminando  $c_3$  y  $c_4$ , ya que por simetría  $c_1 = c_4$  y  $c_2 = c_3$ , se deduce:

$$\lambda \cdot e^{-\lambda} c_1 + (1+e^{-\lambda}) \cdot c_4 = -\frac{a^4}{\pi^4} \cdot \frac{p_0}{D}$$

$$\lambda \cdot e^{-\lambda} c_1 + (-1+e^{-\lambda}) \cdot c_4 = 0$$

resultando:

$$c_1 = c_3 = -\frac{1}{\lambda} \cdot (e^{\lambda} - 1) \cdot \frac{a^4}{2\pi^4} \cdot \frac{p_0}{D}$$

$$c_2 = c_4 = -\frac{a^4}{2\pi^4} \cdot \frac{p_0}{D}$$

La flecha en el punto  $(a/2, b/2)$  es:

$$W\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left\{ (c_1 \cdot \frac{\lambda}{2} + c_2) \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}} + (c_3 \cdot \frac{\lambda}{2} + c_4) \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}} \right\} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{a^4}{\pi^4} \cdot \frac{p_0}{D}$$

es decir:

$$W\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}} (1 + e^{-\lambda}) \right\} \cdot \frac{p \cdot a^4}{\pi^4 \cdot D}$$

$$\text{con } \lambda = \frac{\pi \cdot b}{a}$$

# EJERCICIO E 4.5

La losa rectangular, figura E4.5a, simplemente apoyada en dos de sus bordes y libre en los otros, se discretiza mediante una estructura empujillado plano, cuyas barras y nudos se indican en la figura E4.5b.

SE PIDE:

- 1) Indicar las condiciones de sustentación (coacciones al movimiento) que deben imponerse en los nudos de los bordes, referidos a los ejes locales de barra.
- 2) Si se disponen en los nudos del apoyo 1-2-3-4-5-6 de la figura E4.5b las dos coacciones siguientes: Giro según el eje  $x$  y desplazamiento vertical según el eje  $z$ , se obtienen las reacciones: Fuerza vertical  $R_i$  y momento  $G_i$  en cada nudo  $i$ . Se desea determinar aproximadamente la reacción vertical unitaria existente en el nudo 3 de la losa continua en función de los resultados  $R_i$  y  $G_i$  del empujillado o elementos finitos. Las respuestas se razonarán debidamente.

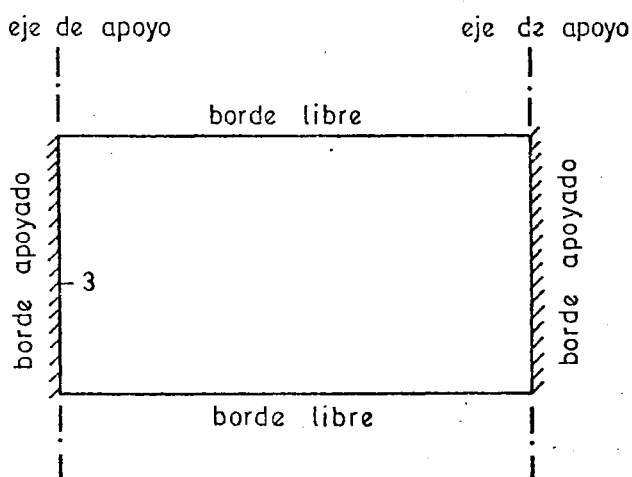


Fig. E4.5a. - Estructura continua

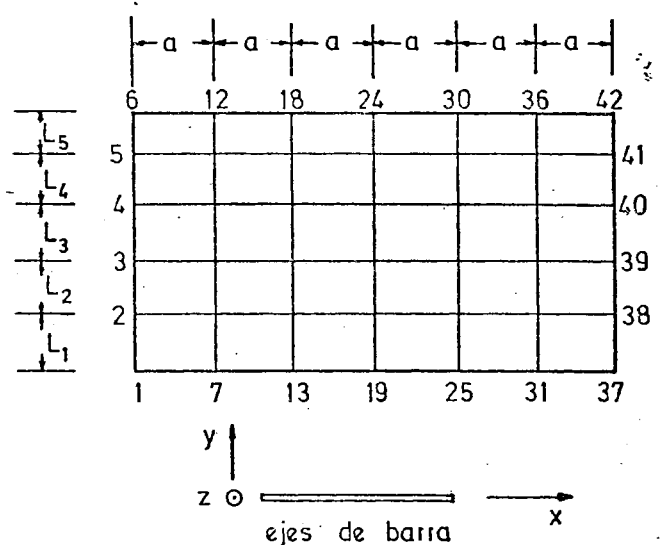


Fig. E4.5b. - Estructura discreta

1) A los nudos 1-2-3-4-5-6, 37-38-39-40-41-41 se les imponen las coacciones al desplazamiento vertical según Z y al giro según X.

A los nudos 7-13-19-25-31, 12-18-24-30-36 no se les coaccionan.

2) a) Se consideran la fórmula previa siguiente, en la que se tiene en cuenta una distribución lineal.

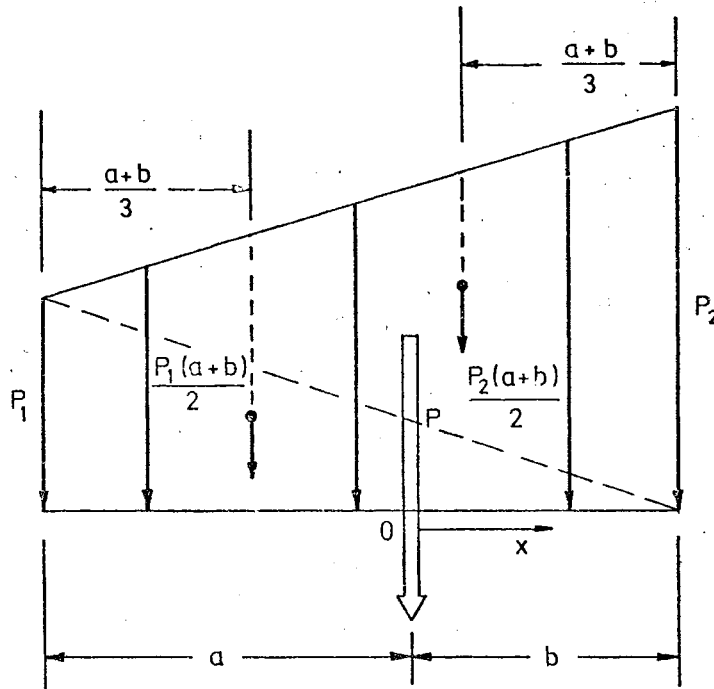


Fig. E4.5c

En la figura E4.5c se conocen  $a$ ,  $b$  y  $P$  y se trata de determinar  $P_1$  y  $P_2$ .

$$(P_1 + P_2) \cdot \frac{a+b}{2} = P$$

$$p_1 \frac{a+b}{2} \left(a - \frac{a+b}{3}\right) = p_2 \frac{a+b}{2} \left(b - \frac{a+b}{3}\right)$$

$$p_1 = \frac{2(2b-a)}{(a+b)^2} \cdot P$$

$$p_2 = \frac{2(2a-b)}{(a+b)^2} \cdot P \quad \{ E4.5a \}$$

$$p_x = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{a+b} \cdot (x+a)$$

b) Teniendo en cuenta ahora el caso planteado se tiene la figura E4.5d:

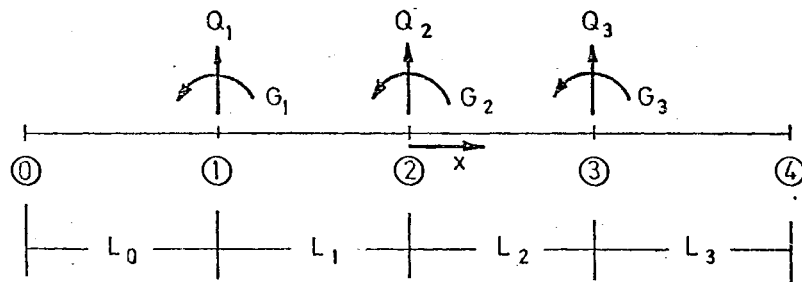


Fig. E4.5d

Sólo se considera el resultado  $G_2$  y  $Q_2$  en el nudo 2. Aplicando E4.5a se obtiene, con eje  $x$ , origen en el nudo 2.

$$q_x = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{a+b} \cdot (x+a), \quad q_1 = \frac{4(2L_2 - L_1)}{(L_1 + L_2)^2} \cdot Q_2, \quad q_2 = \frac{4(2L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^2} \cdot Q_2$$

$$q_x = \left\{ \frac{4(2L_2 - L_1)}{(L_1 + L_2)^2} + \frac{12(L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot (2x - L_1) \right\} \cdot Q_2 ;$$

El cortante debido al torsor es  $\frac{\partial g}{\partial x}$  g es por identico razonamiento:

$$g = \left\{ \frac{4(2L_2 - L_1)}{(L_1 + L_2)^2} + \frac{12(L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot (2x + L_1) \right\} G_2$$

y:

$$r_x = q_x + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{4 \cdot Q_2}{(L_1 + L_2)^3} \cdot \left\{ (2L_2 - L_1) \cdot (L_2 - 2x) + (2L_1 - L_2) \cdot (L_1 + 2x) + \frac{24(L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \right\} \cdot G_2$$

En particular para  $x = -\frac{L_1}{2}$  y  $x = \frac{L_2}{2}$  se obtiene:

$$r_x = \frac{4 \cdot Q_2 (2L_2 - L_1)}{(L_1 + L_2)^2} + \frac{24(L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot G_2 \quad \text{para } x = -\frac{L_1}{2}$$

$$r_x = \frac{4 \cdot Q_2 (2L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^2} + \frac{24(L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot G_2 \quad \text{para } x = \frac{L_2}{2}$$

$$r_x = \frac{8 \cdot Q_2 (L_1^2 + L_2^2 - L_1 \cdot L_2)}{(L_1 + L_2)^2} + \frac{24(L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot G_2 \quad \text{para } x = 0$$

La reacción total es:

$$R_2 = Q_2 + \frac{12(L_1 - L_2)}{(L_1 + L_2)^2} \cdot G_2$$

c) Si se quieren tener en cuenta los nudos contiguos se considerará la interpolación lineal {E4.5a}, se puede hallar el valor de p en el origen (x=0):

$$p(0) = \frac{P_1 \cdot b + P_2 \cdot a}{a+b} = \frac{4(a^2 + b^2 - a \cdot b)}{(a+b)^3}$$

Si se tienen en cuenta ahora tres nudos consecutivos ① ( $G_1$  y  $Q_1$ ) ; ② ( $G_2$  y  $Q_2$ ) ; ③ ( $G_3$  y  $Q_3$ ) y se aplica la fórmula anterior a cada uno de los tramos se obtiene:

$$q_1 = \frac{8(L_0^2 + L_1^2 - L_0 \cdot L_1)}{(L_0 + L_1)^3} \cdot Q_1 \quad \text{para } x = -L_1 \text{ (absoluto)}$$

$$q_2 = \frac{8(L_1^2 + L_2^2 - L_1 \cdot L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot Q_2 \quad \text{para } x = 0 \text{ (absoluto)}$$

$$q_3 = \frac{8(L_2^2 + L_3^2 - L_2 \cdot L_3)}{(L_2 + L_3)^3} \cdot Q_3 \quad \text{para } x = L_2 \text{ (absoluto)}$$

Interpolando parabólicamente se deduce:

$$q_x = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$$

Con:

$$\alpha = \frac{(q_1 - q_2) \cdot L_2 + (q_3 - q_2) \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 \cdot (L_1 + L_2)}$$

$$\beta = \frac{-(q_1 - q_2) \cdot L_2^2 + (q_3 - q_2) \cdot L_1^2}{L_1 \cdot L_2 \cdot (L_1 + L_2)}$$

$$\gamma = q_2$$

Particularizando se obtiene:

$$q_{x12} = \frac{(q_1 - q_2) \cdot L_2 \cdot (L_1 + 2L_2) - (q_3 - q_2) \cdot L_1}{4L_2 \cdot (L_1 + L_2)} + q_2 \quad \text{para } x = -\frac{L_1}{2}$$

$$q_{x2} = q_2 \quad \text{para } x=0$$

$$q_{x23} = \frac{-(q_1 - q_2) \cdot L_2 + (q_3 - q_2) \cdot L_1 \cdot (2L_1 + L_2)}{4L_1 \cdot (L_1 + L_2)} + q_2 \quad \text{para } x = \frac{L_2}{2}$$

Análogamente con los torsores se tiene:

$$g = \alpha' \cdot x^2 + \beta' \cdot x + \gamma'$$

con:

$$\alpha' = \frac{(g_1 - g_2) \cdot L_2 + (g_3 - g_2) \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 \cdot (L_1 + L_2)}$$

$$\beta' = \frac{-(g_1 - g_2) \cdot L_2^2 + (g_3 - g_2) \cdot L_1^2}{L_1 \cdot L_2 \cdot (L_1 + L_2)}$$

$$\gamma' = m_2$$

$$g_1 = \frac{8(L_0^2 + L_1^2 - L_0 \cdot L_1)}{(L_0 + L_1)^3} \cdot G_1$$

$$g_2 = \frac{8(L_1^2 + L_2^2 - L_1 \cdot L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot G_2$$



$$g_3 = \frac{8(L_2^2 + L_3^2 - L_2 \cdot L_3)}{(L_2 + L_3)^2} \cdot G_3$$

Resulta, la reacción de Kirchoff:

$$r_x = q_x + \frac{\partial g}{\partial x}$$

es decir:  $r_x = \alpha \cdot x^2 + (\beta + 2\alpha') \cdot x + \gamma + \beta'$

Particularizando se tiene:

$$r_{x12} = q_{x12} + \frac{g_2 - g_1}{L_1} \quad \text{para } x = -\frac{L_1}{2}$$

$$r_{x2} = q_{x2} + \frac{(g_2 - g_1) \cdot L_2^2 + (g_3 - g_2) \cdot L_1^2}{L_1 \cdot L_2 \cdot (L_1 + L_2)} \quad \text{para } x = 0$$

$$r_{x23} = q_{x23} + \frac{g_3 - g_2}{L_2} \quad \text{para } x = \frac{L_2}{2}$$

La reacción total es:

$$R_2 = Q_2^* + \frac{L_1 + L_2}{4} \cdot \left( \frac{g_2 - g_1}{L_1} + \frac{g_3 - g_2}{L_2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{con: } Q_2^* &= q_2 \cdot \frac{L_1 + L_2}{2} + \frac{(q_1 - q_2) \cdot (L_1^2 \cdot L_2 + 2L_1 \cdot L_2^2 - L_2^3)}{48 \cdot L_1 \cdot L_2} + \\ &+ \frac{(q_3 - q_2) \cdot (-L_1^3 + 2 \cdot L_1^2 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_2^2)}{48 \cdot L_1 \cdot L_2} \end{aligned}$$

En la aproximación usual en que:  $L_0 \approx L_1$  y  $L_3 = L_2$ , resulta:

$$g_1 = \frac{G_1}{L_1} \quad g_2 = \frac{8(L_1^2 + L_2^2 - L_1 \cdot L_2)}{(L_1 + L_2)^3} \cdot G_2 \quad g_3 = \frac{G_3}{L_2}$$

Además  $Q_2^* \approx Q_2$

La reacción total es:

$$R_2 = Q_2 + \frac{(L_1 + L_2)}{4} \cdot \left( \frac{G_3}{L_2^2} - \frac{G_1}{L_1^2} \right) + 2 \left\{ 1 - \frac{3 \cdot L_1 \cdot L_2}{(L_1 + L_2)^2} \right\} \left( \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right) \cdot G_2$$

En el caso particular  $L_1 = L_2 = L$

$$Q_2^* = \frac{q_1 + 22 \cdot q_2 + q_3}{24} \cdot L \approx Q_2 = q_2 \cdot L$$

$$R_2 = q_2 \cdot L + \frac{G_3 - G_1}{2L}$$

d) Otra técnica más adecuada es adoptar una variación parabólica para  $g$ :

$$g = Q \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$$

y las condiciones son: (figura E4.5e)

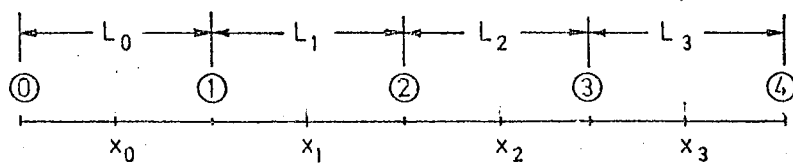


Fig. E4. 5 e

$$\int_{-(L_1 + \frac{L_0}{2}) \cdot x_0}^{-L_1/2 = x_1} g \cdot dx = G_1 \quad \int_{-L_1/2 = x_1}^{L_2/2 = x_2} g \cdot dx = G_2 \quad \text{y} \quad \int_{L_2/2 = x_2}^{L_2 + L_3/2 = x_3} g \cdot dx = G_3$$

permiten determinar  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$

$$\begin{bmatrix} x_1^3 - x_0^3 & x_1^2 - x_0^2 & x_1 - x_0 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^3 - x_2^3 & x_3^2 - x_2^2 & x_3 - x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\beta}{2} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}$$

si se llama  $x_{ij} = x_i - x_j$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_1 \cdot x_0 + x_0^2 & x_1 + x_0 & 1 \\ x_2^2 + x_2 \cdot x_1 + x_1^2 & x_2 + x_1 & 1 \\ x_3^2 + x_3 \cdot x_2 + x_2^2 & x_3 + x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\beta}{2} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1/x_{10} \\ G_2/x_{21} \\ G_3/x_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2^2 - x_0^2 + x_1(x_2 - x_0) & x_2 - x_0 \\ x_3^2 - x_2^2 + x_2(x_3 - x_1) & x_3 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_2}{x_{21}} - \frac{G_1}{x_{10}} \\ \frac{G_3}{x_{32}} - \frac{G_2}{x_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{3}{x_{30}} \left[ -\frac{1}{x_{20}} \left( \frac{G_2}{x_{21}} - \frac{G_1}{x_{10}} \right) + \frac{1}{x_{31}} \left( \frac{G_3}{x_{32}} - \frac{G_2}{x_{21}} \right) \right]$$

$$\beta = \frac{2}{x_{21}} \left[ -\frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_{20}} \left( \frac{G_2}{x_{21}} - \frac{G_1}{x_{10}} \right) + \frac{x_2 + x_1 + x_0}{x_{31}} \left( \frac{G_3}{x_{32}} - \frac{G_2}{x_{21}} \right) \right]$$

$$\gamma = \frac{G_2}{X_{21}} - \frac{1}{X_{30}} \left[ -\frac{2 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2 + x_3 (x_1 + x_2)}{X_{20}} \left( \frac{G_3}{X_{21}} + \frac{G_2}{X_{10}} \right) + \right. \\ \left. + 2 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2 + x_0 (x_1 + x_0) \left( \frac{G_3}{X_{32}} - \frac{G_2}{X_{21}} \right) \right]$$

La ley de cortantes:

$$q_{gx} = \frac{\partial \cdot g}{\partial \cdot x} = 2 \cdot \alpha \cdot x + \beta \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

y el cortante concentrado es:

$$Q_T = (x_2 - x_1) \cdot \beta = \frac{2 \cdot X_{21}}{X_{30}} \left[ -\frac{x_3 + x_2 + x_1}{X_{20}} \left( \frac{G_2}{X_{21}} - \frac{G_1}{X_{10}} \right) + \frac{x_2 + x_1 + x_0}{X_{31}} \right. \\ \left. \cdot \left( \frac{G_3}{X_{32}} - \frac{G_2}{X_{21}} \right) \right]$$

Como casos particulares se tiene:

a) Figura E4.5f

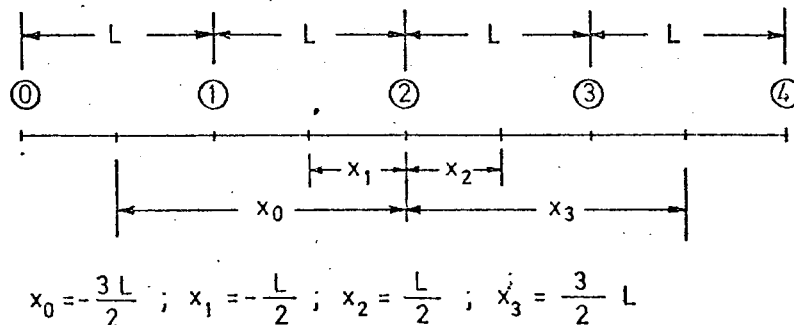
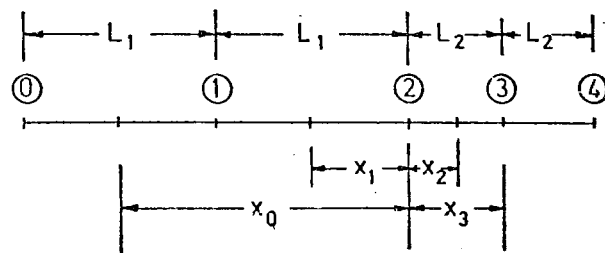


Fig. E4.5 f

$$Q_T = \frac{2 \cdot L}{3 \cdot L} \left[ -\frac{\frac{3}{2} \cdot L}{2 \cdot L} \left( \frac{G_2}{L} - \frac{G_1}{L} \right) - \frac{\frac{3}{2} \cdot L}{2 \cdot L} \left( \frac{G_3}{L} - \frac{G_2}{L} \right) \right]$$

$$Q_T = -\frac{1}{2 \cdot L} \left[ -G_2 + G_1 + G_2 - G_3 \right] = \frac{G_3 - G_1}{2 \cdot L}$$

b) Figura E4.5g



$$x_0 = -\frac{3L_1}{2} ; \quad x_2 = -\frac{L_1}{2} ; \quad x_2 = \frac{L_2}{2} ; \quad x_3$$

Fig E4.5g

$$Q_T = \frac{(L_1 + L_2)}{\frac{3}{2}(L_2 + L_1)} \left[ -\frac{\frac{4 \cdot L_2 - L_1}{2(L_2 + 3L_1)}}{2} \left( \frac{2 \cdot G_2}{L_1 + L_2} - \frac{G_1}{2 \cdot L_1} \right) + \frac{L_2 - 4 \cdot L_1}{2(\frac{3}{2} \cdot L_2 + \frac{L_1}{2})} \cdot \left( \frac{G_3}{2 \cdot L_2} - \frac{2 \cdot G_2}{L_1 + L_2} \right) \right]$$

$$Q_T = \frac{2}{3} \left[ -\frac{4 \cdot L_2 - L_1}{L_2 + 3 \cdot L_1} \left( \frac{2 \cdot G_2}{L_1 + L_2} - \frac{G_1}{2 \cdot L_1} \right) + \frac{L_2 - 4 \cdot L_1}{3 \cdot L_2 + L_1} \left( \frac{G_3}{2 \cdot L_2} - \frac{2 \cdot G_2}{L_1 + L_2} \right) \right]$$

EJERCICIO E.5.1

Se considera una placa circular de radio  $R$  y rigidez  $D$ , apoyada a lo largo de su contorno, de la figura E5.1d. Esta placa está sometida a una sollicitación de flexión con simetría de revolución. Se adoptan como grados de libertad de esta estructura, en términos de movimientos, el giro en un punto del borde y en términos de fuerzas, el momento flector. Se pide:

- La matriz de rigidez.
- La solución inicial (momentos de empotramientos rígido) bajo la acción de una carga vertical uniforme de intensidad  $p$ .
- Idéntica cuestión al apartado anterior, pero con una carga concentrada en el centro de la placa, de valor  $P$ .

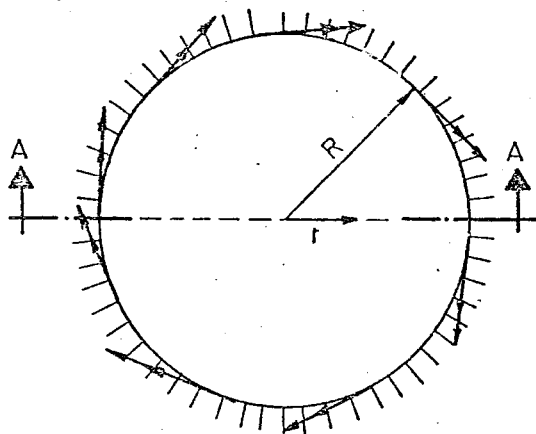
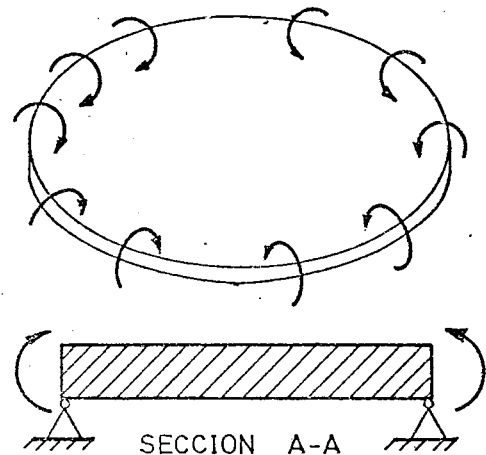


Fig. E5.1a



a) El procedimiento de análisis es típico. Se eligen coordenadas polares  $(r, \theta)$  figura E5.1b.

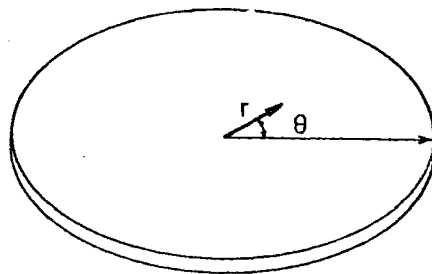


Fig. E5.1b

La ecuación diferencial homogénea de la placa es:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \cdot \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \cdot w = 0 \quad \{ E5.1a \}$$

Las condiciones de contorno cinemáticas (esenciales) son:

$$w \quad y \quad \psi = \frac{dw}{dr} \quad \{ E5.1b \}$$

Las condiciones de contorno estáticas (naturales) son:

$$-D \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot (r \cdot \frac{dw}{dr}) \right) \right] = Q_r \quad \{ E5.1c \}$$

$$-D \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right] = M_r$$

La solución general de { E5.1a } es:

$$w = r^2 \cdot (Lr - 1) \cdot C_1 + r^2 \cdot C_2 + Lr \cdot C_3 + 4 \quad \{ E5.1d \}$$

con  $L = \text{logaritmo natural}$  y  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  constantes - arbitrarias.

Las derivadas sucesivas de  $w$  son:

$$\frac{dw}{dr} = r(2.Lr - 1).C_1 + 2r.C_2 + \frac{1}{r}.C_3$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = (2.Lr + 1).C_1 + 2.C_2 - \frac{1}{r^2}.C_3$$

$$\frac{d^3w}{dr^3} = \frac{2}{r}.C_1 + \frac{2}{r^3}.C_3$$

Y los esfuerzos son:

$$M_r = D \left\{ 2(1 + \nu).Lr + (1 - \nu) \right\} . C_1 + 2(1 + \nu).C_2 - \frac{1 - \nu}{r^2} . C_3 \quad \{E5.1e\}$$

$$Q_r = - \frac{4.D}{r} . C_1 \quad E5.1f$$

Las condiciones cinemáticas son:

$$\text{Para } r = 0 \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad Q_r = 0$$

$$\text{Para } r = R \quad w = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dw}{dr} = \psi_1$$

resultando

$$C_3 = 0 \quad \text{y} \quad C_1 = 0$$

$$R^2 (LR - 1).C_1 + R^2.C_2 + C_4 = 0 \quad R(2LR - 1).C_1 + 2R.C_2 = \psi_1$$

por lo tanto



$$c_2 = \frac{\psi_1}{2R} \quad c_4 = -\frac{R\psi_1}{2}$$

El momento flector  $M_r$  en el borde  $r = R$  es:

$$M_{r1} = D \left[ \{2(1 + \nu) \cdot LR + (1 - \nu)\} \cdot c_1 + 2(1 + \nu) \cdot c_2 \right]$$

se obtiene así:

$$M_{r1} = D(1 + \nu) \cdot \frac{\psi_1}{R} \quad \text{E5.1g}$$

es decir  $M_{r1} = k \cdot \psi_1$  siendo  $k$  la rigidez pedida, cuya expresión es:

$$k = \frac{D(1 + \nu)}{R} = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu) \cdot R}$$

b) En este caso, la ecuación diferencial es:

$$D \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \cdot \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \cdot w = p$$

que tiene una solución particular del tipo  $w_0 = \frac{pr^4}{640}$

La solución general es:

$$w = w_0 + w_c$$

con  $w_c$  dada por {E5.1d}

Las condiciones de contorno son:

$$\text{Para } r = 0 \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad Q_r = 0$$

$$\text{Para } r = R \quad w = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dw}{dr} = 0$$

con lo que resulta  $C_1 = C_3 = 0$

$$C_2 = -\frac{p \cdot R^2}{32 \cdot D} \quad C_4 = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot D}$$

obteniéndose como solución  $w = \frac{p}{64 \cdot D} \cdot (R^2 - r^2)^2$

El momento de empotramiento rígido se deduce a partir de {E5.1e}, resultando:

$$Mr_1 = -\frac{p \cdot R^2}{8} \quad \{E5.1h\}$$

Existe otra posibilidad de resolución de este apartado, más estructural, que consiste en considerar cualquier solución particular  $w = w_0$ , que satisface el equilibrio pero no la compatibilidad y mediante la rigidez obtenida en {E5.1g}, deducir la solución inicial como se hace en el cálculo de vigas.

En efecto:

$$w_0 = -\frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D} + \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot D} \quad (\text{que es } w_0 = 0 \text{ para } r = R)$$

$$\text{el giro en el borde es } \psi_1^0 = \left. \frac{dw_0}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{p \cdot R^3}{16 \cdot D}$$

El giro en el borde para un momento repartido  $G$  es:

$$\psi_1^1 = \frac{1}{k} \cdot G = \frac{R}{D(1 + \nu)} \cdot G$$

La compatibilidad de giros (movimientos verticales ya se cumplen) en el borde  $r = R$ , conduce a la ecuación siguiente:

$$\psi_1^1 + \psi_1^0 = 0$$

es decir:

$$G = -k \cdot \psi_1^0 = \frac{D(1 + \nu)}{R} \cdot \frac{p \cdot R^3}{16 \cdot D} = \frac{p \cdot R^2}{16} \cdot (1 + \nu)$$

el momento de empotramiento rígido es entonces:

$$M_{r1} = G + D \cdot \left( \frac{d^2 \cdot \omega_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d^2 \cdot \omega_0}{dr} \right)_{r=R} =$$

$$= \frac{p \cdot R^2}{16} \cdot (1 + \nu) + D \cdot \left( -\frac{3 \cdot p \cdot R^2}{16 \cdot D} - \frac{\nu \cdot p \cdot R^2}{16 \cdot D} \right) = -\frac{p \cdot R^2}{8}$$

c) Se resuelve este caso de modo análogo, según los dos procedimientos ya descritos:

Directamente se obtiene:

Ecuación {E5.1a} homogénea y las condiciones de borde:

$$\text{Para } r = 0 \quad \frac{d\omega}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad 2 \cdot \pi \cdot r \cdot Q_r = -P$$

$$\text{Para } r = R \quad \omega = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\omega}{dr} = 0$$

resultando:

$$C_3 = 0 \quad P = -8 \cdot \pi \cdot D \cdot C_1$$

$$R \cdot (LR - 1) \cdot C_1 + R \cdot C_2 + C_4 = 0 \quad R(2LR - 1) \cdot C_1 + 2R \cdot C_2 = 0$$

Y la solución es:

$$w = -\frac{p \cdot R^2}{16 \cdot \pi \cdot D} (1 - \rho^2 + 2 \cdot \rho^2 \cdot L \cdot \rho) \quad \text{con} \quad \rho = \frac{r}{R}$$

Y el momento de empotramiento rígido se deduce de {E5.1e}, obteniéndose:

$$M_{r1}^0 = -\frac{p}{4 \cdot \pi}$$

La otra posibilidad, más conveniente, es usar superposición. Una solución particular es:

$$w_0 = -\frac{p}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 (Lr - 1)$$

que constituye la solución homogénea, con la condición de -- equilibrio con la carga exterior concentrada  $2 \cdot R \cdot Q_r = P$

El ángulo en  $r = R$  es:

$$\psi_1^0 = -\frac{p}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot R \cdot (2 \cdot LR - 1)$$

Por otra parte, el producido por el momento  $G$  es:

$$\psi_1^1 = \frac{1}{k} \cdot G$$

la compatibilidad de giros implica:

$$\psi_1^1 + \psi_1^1 = 0$$

es decir:

$$G = \frac{D(1 + \nu)}{R} \cdot \frac{P}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot R(2 \cdot L R - 1) = \frac{P(1 + \nu)}{8R} \cdot (2 \cdot L R - 1)$$

El momento de empotramiento rígido es entonces:

$$\begin{aligned} M_{r1} &= G + D \left( \frac{d^2 \cdot w_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw_0}{dr} \right)_{r=R} = \\ &= \frac{P(1 + \nu)}{8 \cdot \pi} \cdot (2 \cdot L R - 1) - D \cdot \frac{P}{8 \cdot \pi \cdot D} \{ 2(1 + \nu) \cdot L R + (1 - \nu) \} = \\ &= -\frac{P}{4 \cdot \pi} \end{aligned}$$

EJERCICIO E5.2

Determinar la matriz de rigidez de una placa de la figura E5.2a circular de radio  $R$  y rigidez  $D$  sometida a solicitaciones de flexión con simetría de revolución. Se considerarán:

- a) 2 grados de libertad representados en movimientos por el desplazamiento y giro en los puntos del borde (se supone fijo el centro de la placa).
- b) 3 grados de libertad correspondientes a las dos anteriores y al movimiento vertical en el centro de la placa.

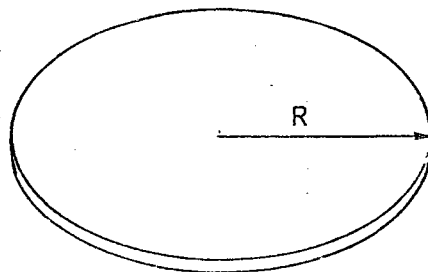


Fig. E5.2a

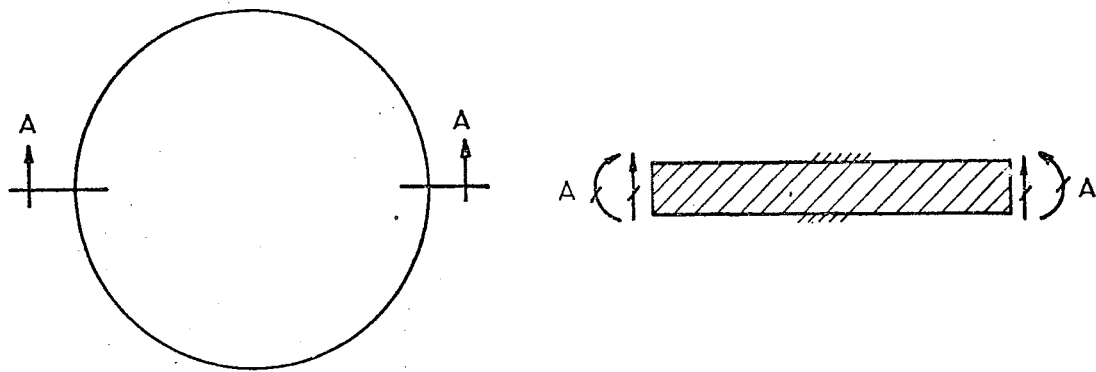


Fig. E5.2 b

La ecuación diferencial homogénea de la placa es:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right)^2 \cdot \omega = 0$$

con las condiciones de contorno

para  $r = 0$        $\omega = 0$       y       $\frac{d\omega}{dr} = 0$  (ahora existe un cor

tante concentrado en el centro)

para  $r = R$        $\omega = \omega_1$       y       $\frac{d\omega}{dr} = \psi_1$

Es decir:

$$c_4 = 0 \qquad c_3 = 0$$

$$\frac{\omega_1}{R^2} = (L \cdot R - 1) \cdot c_1 + c_2 \quad , \quad \frac{\psi_1}{R} = (2 \cdot L \cdot R - 1) \cdot c_1 + 2c_2$$

la solución es:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2L \cdot R - 1 & -(L \cdot R - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\omega_1}{R^2} \\ \frac{\psi_1}{R} \end{bmatrix} = \underline{G_d^{-1}} \underline{d}$$

Por otra parte, las condiciones estáticas son:

$$Q_{r1} = - \frac{4 \cdot D}{R} \cdot c_1$$

$$M_{r1} = -D \left( 2(1 + \nu) \cdot L R + (1 - \nu) \right) \cdot c_1 + 2(1 + \nu) \cdot c_2$$

Por lo tanto:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} R \cdot Q_{r1} \\ M_{r1} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2(1 + \nu) \cdot L R + (1 - \nu) & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{G}_p \cdot \underline{c}$$

La matriz de rigidez es, entonces:

$$\underline{p} = \underline{G}_p \cdot \underline{G}_d^{-1} \cdot \underline{d} = \underline{k} \cdot \underline{d}$$

con

$$\underline{k} = D \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2(1 + \nu) \cdot L R + (1 - \nu) & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2L R - 1 & -(L R - 1) \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\underline{k} = D \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 3 + \nu \end{bmatrix}$$

En función de las acciones no homogeneizadas se tiene la matriz de rigidez:

$$\underline{p}' = \underline{k}' \cdot \underline{d}'$$

con

$$\underline{p}' = \begin{bmatrix} Q_{r1} \\ M_{r1} \end{bmatrix} \quad \underline{d}' = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}$$



$$k' = D \begin{bmatrix} \frac{8}{R^3} & -\frac{4}{R^2} \\ -\frac{4}{R^2} & \frac{3+\nu}{R} \end{bmatrix}$$

b) Ahora las condiciones de apoyo son:

para  $r = 0$   $\omega = \omega_0$  y  $\frac{d\omega}{dr} = 0$

para  $r = R$   $\omega = \omega_1$  y  $\frac{d\omega}{dr} = \psi_1$

se obtiene  $c_3 = 0$   $c_4 = \omega_0$

$$\frac{\omega_1}{R^2} = (L R - 1) \cdot c_1 + c_2 + \frac{c_4}{R^4} ; \quad \frac{\psi_1}{R} = (2 \cdot L R - 1) \cdot c_1 + 2 \cdot c_2$$

Sistema cuya solución es:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \frac{c_4}{R^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 \cdot L R + 1 & 2 \cdot L R - 1 & -L R + 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{R^2} \\ \frac{\omega_1}{R^2} \\ \frac{\psi_1}{R} \end{bmatrix} = \underline{G}_d^{-1} \cdot \underline{d}$$

Las cargas son:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{r0} \\ \overline{Q}_{r1} \\ M_{r1} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} L 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2(1+\nu) \cdot L R + (1-\nu) & -2(1+\nu) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \frac{c_4}{R^2} \end{bmatrix} = \underline{G}_p \cdot \underline{c}$$

Con  $\overline{Q}_{r0} = r \cdot Q_{r0}$  y  $\overline{Q}_{r1} = r \cdot Q_{r1}$  ;  $\overline{Q}_{r0}$  y  $\overline{Q}_{r1}$  es-

fuerzas cortantes por unidad de longitud de sección. Se comprende que  $\bar{Q}_{r0}$  es finito, pero no así  $Q_{r0}$ .

Eliminando  $\underline{C}$  resulta

$$\underline{p} = \underline{k} \cdot \underline{d}$$

siendo  $\underline{k} = \underline{G}_p \cdot \underline{G}_d^{-1}$

es decir

$$k = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 3+\nu \end{bmatrix}$$

EJERCICIO E5.3

La placa circular de la figura E5.3a de radio  $R$  espesor  $h$ , módulo de elasticidad  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$  se encuentra sometida, a lo largo de la circunferencia de borde, a una carga vertical de valor  $p$  por unidad de longitud, tal como se indica en la figura. La sustentación es un cable de acero de módulo de elasticidad  $E_a$ , área  $\Omega$  y longitud  $L$ . Se desea conocer el valor de la flecha máxima.

Los datos numéricos son:

$$R = 6 \text{ m} \quad h = 0,25 \text{ m} \quad E = 3 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2 \quad \nu = 0,20$$

$$p = 1,0 \text{ t/m} \quad E_a = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \Omega = 20 \text{ cm}^2$$

$$L = 1,0 \text{ m}$$

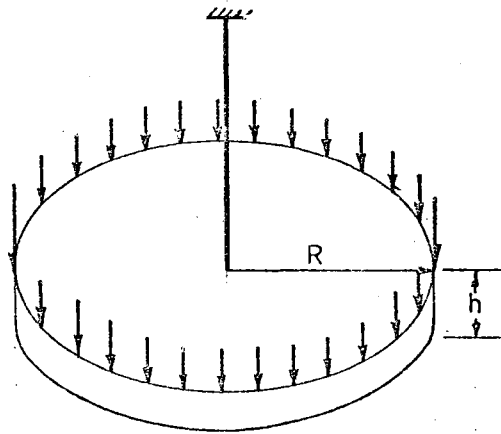


Fig. E5.3a

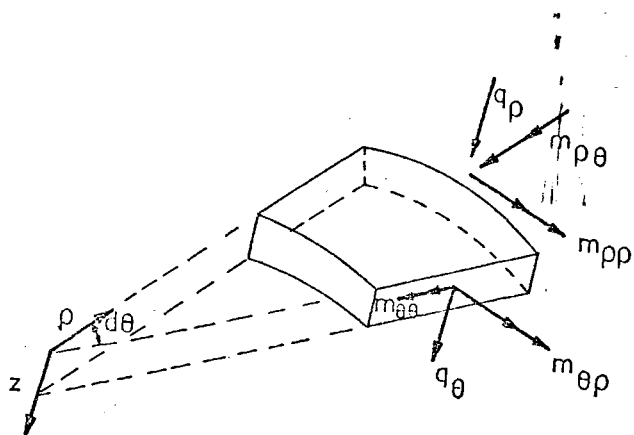


Fig. E5.3b

Teniendo en cuenta la figura E5.3b se tiene:

$$W(\rho) = c_0 \frac{\rho^2}{4} (L \rho - 1) + c_1 \frac{\rho^2}{4} + c_2 \cdot L \cdot \rho + c_3$$

y por lo tanto:

$$W'(\rho) = \frac{c_0 \cdot \rho}{2} (L \rho - 1) + \frac{c_0}{4} \cdot \rho + \frac{c_1}{2} \cdot \rho + c_2 \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{c_0}{2} \cdot \rho \cdot L \rho - \frac{c_0}{4} \cdot \rho + \frac{c_1}{2} \cdot \rho + \frac{c_2}{\rho}$$

$$W''(\rho) = \frac{c_0}{2} \cdot L \rho + \frac{c_0}{2} - \frac{c_0}{4} + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{\rho^2} = \frac{c_0}{2} \cdot L \rho + \frac{c_0}{4} + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{\rho^2}$$

$$W'''(\rho) = \frac{c_0}{2} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{2 \cdot c_2}{\rho^3}$$

Si se imponen las condiciones de contorno se tiene:

Para  $\rho = 0$   $W'(\rho) = 0$  luego:

$$\frac{c_0}{2} \cdot \frac{L \rho}{\frac{1}{\rho}} + \frac{c_2}{\rho} = 0 ; \quad \frac{c_0}{2} \cdot \frac{1/\rho}{-1/\rho^2} + \frac{c_2}{\rho} = 0 ; \quad \boxed{c_2 = 0}$$

Por otra parte:

$2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot q_\rho = X$  siendo  $X$  la tensión del cable

$$q_\rho = -D \cdot \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dw}{d\rho} \right] = -D \left[ \frac{C_0}{2} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{C_0}{2} \cdot \frac{1}{\rho} \right] = -D \cdot C_0 \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$-2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot D \cdot C_0 \cdot \frac{1}{\rho} = X$$

$$C_0 = -\frac{X}{2 \cdot \pi \cdot D}$$

Como la carga es del tipo  $Z = Z(\rho)$  entonces  $m_{\rho\theta} = 0$  y la reacción de Kirchhoff es  $q_\rho$ :

$$\text{para } \rho = R \quad ; \quad q = -D \cdot C_0 \cdot \frac{1}{R} = p \longrightarrow C_0 = \frac{-p \cdot R}{D}$$

$$m_{\rho\rho} = -D \left[ w''(\rho) + \frac{\nu}{\rho} \cdot w'(\rho) \right] = -D \left[ \frac{C_0}{2} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{C_0}{4} + \frac{C_1}{2} + \nu \left( \frac{C_0}{2} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{C_0}{4} + \frac{C_1}{2} \right) \right]$$

para  $\rho = R$

$$m_{\rho\rho}(R) = -D \left[ \frac{C_0}{2} \cdot \frac{1}{R} + \frac{C_0}{4} + \frac{C_1}{2} + \nu \left( \frac{C_0}{2} \cdot \frac{1}{R} - \frac{C_0}{4} + \frac{C_1}{2} \right) \right] = 0$$

$$(1 + \nu) \cdot \frac{C_1}{2} = -\frac{C_0}{4} \cdot (1 - \nu) - \frac{C_0}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot (1 + \nu) = \frac{p \cdot R}{4 \cdot D} \cdot (1 - \nu) +$$

$$\frac{p \cdot R}{2 \cdot D} \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{1}{R}$$

$$C_1 = \frac{p \cdot R}{D} \left[ \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} \right]$$

y la tensión en el cable ( $X$ ) es:

$$\frac{X}{2 \cdot \pi \cdot D} = \frac{p \cdot R}{D} \quad \text{de donde} \quad X = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot p$$

resultado que es inmediato considerando la figura E5.3c

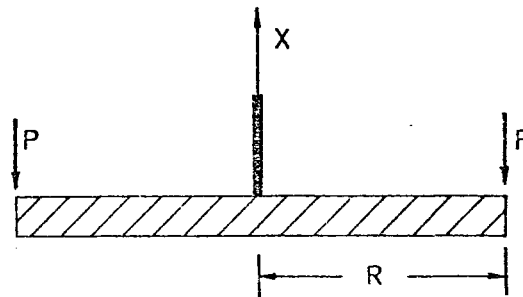


Fig. E5.3c

La ley de flechas queda por tanto como sigue:

$$w(\rho) = -\frac{p \cdot R}{4 \cdot D} \cdot \rho^2 \cdot (\log \rho - 1) + \frac{p \cdot R}{4 \cdot D} \left[ LR + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \right] \rho^2 + c_3$$

además tiene que cumplirse que:

$$\frac{X \cdot L}{E_a \cdot \Omega} = w(0) \quad \text{se tiene} \quad \frac{X \cdot L}{E_a \cdot \Omega} = c_3$$

luego:

$$c_3 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot p \cdot L}{E_a \cdot \Omega} ;$$

La flecha máxima se produce para  $\rho = R$  y es:

$$w(R) = -\frac{p \cdot R^3}{4 \cdot D} \cdot \left[ LR + \frac{p \cdot R^3}{4 \cdot D} + \frac{p \cdot R^3}{4 \cdot D} \cdot LR + \frac{p \cdot R^3}{4 \cdot D} \cdot \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} + \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot p \cdot L}{E_a \cdot \Omega} \right]$$

$$w(R) = p \cdot R \left[ \frac{R^2}{4 \cdot D} \left( 1 + \frac{1-\nu}{2+2\nu} \right) + \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{E_a \cdot \Omega} \right]$$

$$w(R) = p \cdot R \cdot \left( \frac{R^2}{8 \cdot D} \cdot \frac{3 + \nu}{1 + \nu} + \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{E_a \cdot \Omega} \right)$$

$$w_{\text{máx}} = 1 \cdot 6 \cdot \left( \frac{36 \cdot 12 \cdot 0,96}{8 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 0,25^3} \cdot \frac{3,2}{1,2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{2 \cdot 10^7 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} \right)$$

$$w_{\text{máx}} = 6 \cdot \left( \frac{18 \cdot 0,96}{2,5^3 \cdot 10^3} \cdot \frac{32}{12} + \frac{\pi}{20 \cdot 10^3} \right) = 6 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{48 \cdot 0,96}{2,5^3} + \frac{\pi}{20} \right) = 0,0186 \text{ m}$$

$$w_{\text{máx}} \Big|_{\text{en el borde } \rho=R} = 1,86 \text{ cm}$$

EJERCICIO E5.4

La placa circular de la figura E5.4a simplemente apoyada en todo su contorno, tiene radio  $R$ , canto  $h$ , módulo de elasticidad  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ .

Dicha placa está sometida en la mitad de su contorno a un momento uniformemente repartido de valor  $2.R^3/15$  m.t/m.

SE PIDE: Hallar el valor de la flecha en el centro de la placa.

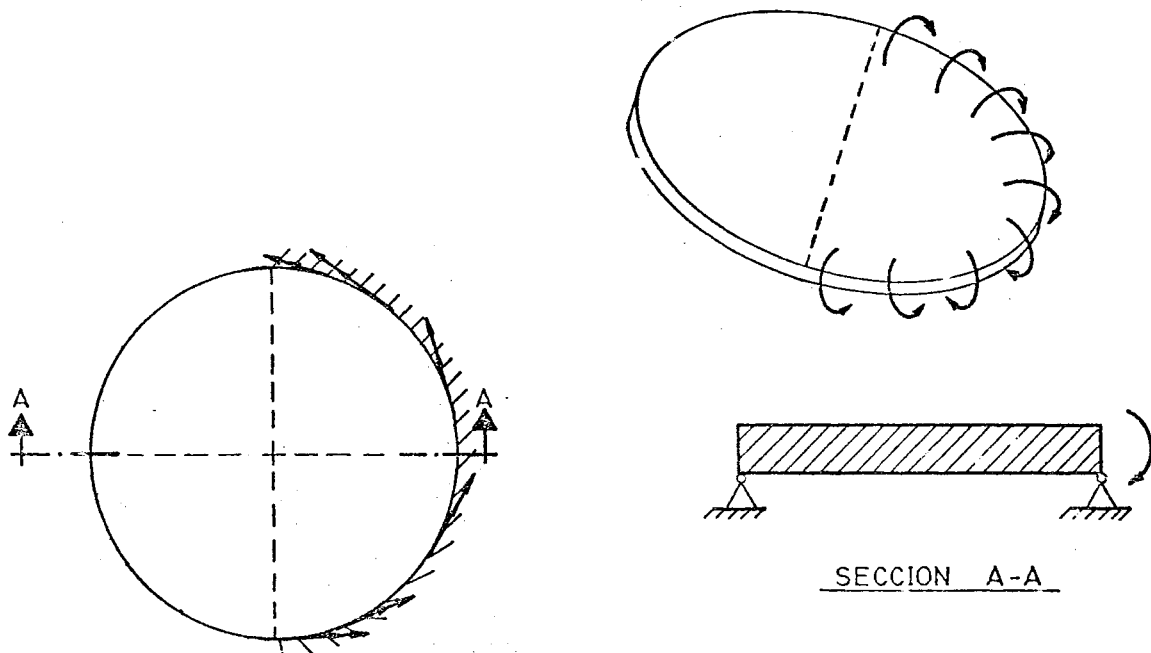


Fig. E5.4a

En la figura E5.4b se indican los esfuerzos en un elemento diferencial.

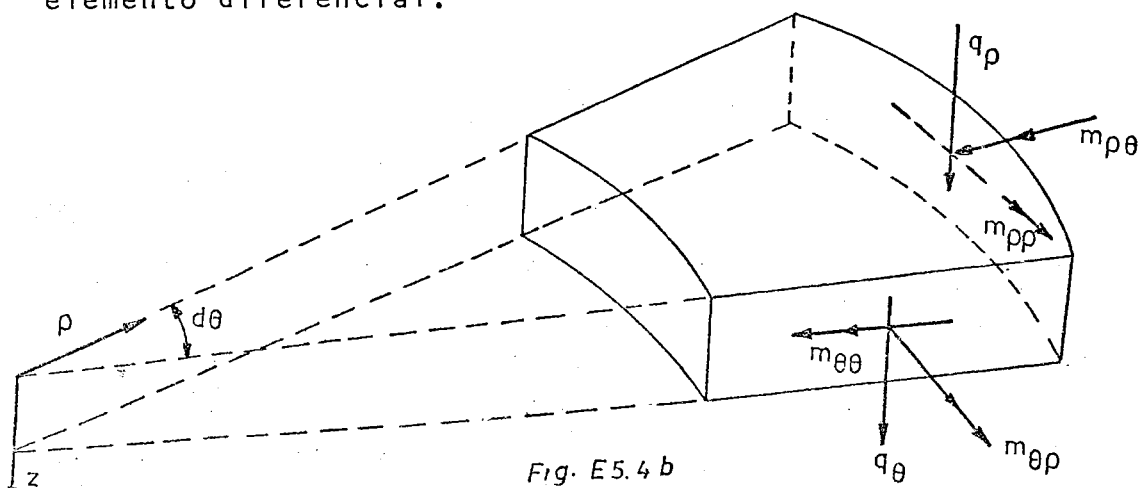


Fig. E5.4b



El problema propuesto se puede resolver descomponiéndolo en dos estados como se indica en la figura E5.4c.

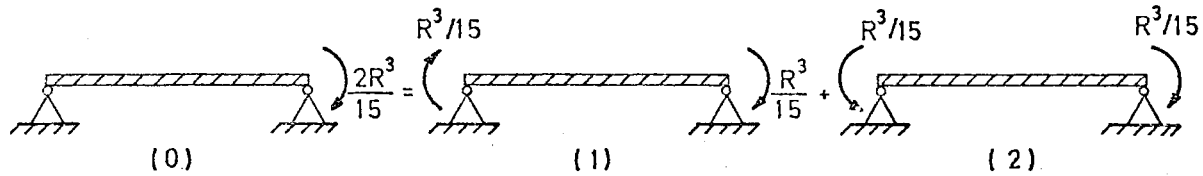


Fig. E5.4c

La flecha correspondiente al estado (1) de la figura E5.4c es cero por antimetría.

La expresión de la flecha en el estado (2) es:

$$w(\rho) = \frac{1}{D} \int \frac{d\rho}{\rho} \int \rho \cdot d\rho \int \frac{d\rho}{\rho} \int \rho \cdot Z(\rho) \cdot d\rho + C_0 \cdot \frac{\rho^2}{4} \cdot (L\rho - 1) + C_1 \cdot \frac{\rho^2}{4} + C_2 \cdot L\rho + C_3$$

Como  $Z(\rho) = 0$ :

$$w(\rho) = \frac{C_0}{4} \cdot \rho^2 \cdot (L\rho - 1) + \frac{C_1}{4} \cdot \rho^2 + C_2 \cdot L\rho + C_3$$

$$w'(\rho) = \frac{C_0}{2} \cdot \rho^2 (L\rho - 1) + \frac{C_0}{4} \cdot \rho + \frac{C_1}{2} \cdot \rho + \frac{C_2}{\rho} = \frac{C_0}{2} \cdot \rho \cdot L\rho - \frac{C_0}{4} \cdot \rho + \frac{C_1}{2} \cdot \rho + \frac{C_2}{\rho}$$

$$w''(\rho) = \frac{C_0}{2} \cdot L\rho + \frac{C_0}{2} \cdot -\frac{C_0}{4} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{\rho^2} = \frac{C_0}{2} \cdot L\rho - \frac{C_2}{\rho^2} + \frac{C_0}{4} + \frac{C_1}{2}$$

$$w'''(\rho) = \frac{c_0}{2\rho} + \frac{2 \cdot c_2}{\rho^3}$$

$$m_{\rho\rho} = -D \left[ \frac{c_0}{2} \cdot L\rho - \frac{c_2}{\rho^2} + \frac{c_0}{4} + \frac{c_1}{2} + \gamma \left[ \frac{c_0}{2} \cdot L\rho - \frac{c_0}{4} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{\rho^2} \right] \right] =$$

$$= -D \left[ \frac{c_0}{2} \cdot (1 + \nu) \cdot L\rho - c_2 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{1}{\rho^2} + \frac{c_0}{4} \cdot (1 - \nu) + \frac{c_1}{2} \cdot (1 + \nu) \right]$$

$$q_\rho = -D \cdot \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{c_0}{2} \cdot L\rho - \frac{c_2}{\rho^2} + \frac{c_0}{4} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{2} \cdot L\rho - \frac{c_0}{4} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{\rho^2} \right] =$$

$$= -D \cdot \frac{c_0}{\rho}$$

Imponiendo las condiciones de contorno se tiene:

$$\rho = 0 \quad \begin{cases} w' = 0 & c_2 = 0 \\ q_\rho = 0 & c_0 = 0 \end{cases} \quad \rho = R \quad \begin{cases} m_\rho = -D \cdot \frac{c_1}{2} \cdot (1 + \nu) = -\frac{R^3}{15} \\ w = \frac{c_1}{4} \cdot \rho^2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{2 \cdot R^3}{15 \cdot D \cdot (1 + \nu)} ; \quad c_3 = -\frac{R^3}{30 \cdot D \cdot (1 + \nu)} ; \quad R^2 = \frac{-R^5}{30 \cdot \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot (1 + \nu)}$$

$$= \frac{-2(1 - \nu) \cdot R^5}{5 \cdot E \cdot h^3}$$

El valor de la flecha en el centro de la placa -

$$w \Big|_{\rho=0} = 0 \quad \text{es;}$$

$$w(0) = \frac{-2(1 - \nu) \cdot R^5}{5 \cdot E \cdot h^3}$$

EJERCICIO E6.1

En la placa de la figura E6.1a, que es un exágono regular empotrado en todo su contorno, determinar el momento de rotura que produce una carga uniforme de  $2 \text{ t/m}^2$ .

Se supone que la relación entre momentos negativos y positivos es de 2 .

El momento positivo es el que produce tracciones - en la cara inferior de la placa.

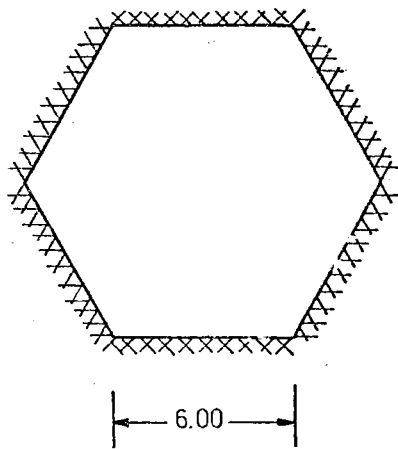


Fig. E 6. 1a

Se suponen las líneas de rotura de la figura E6.1b, y se llama  $m$  al momento de rotura positivo y  $m'$  al momento de rotura negativo.

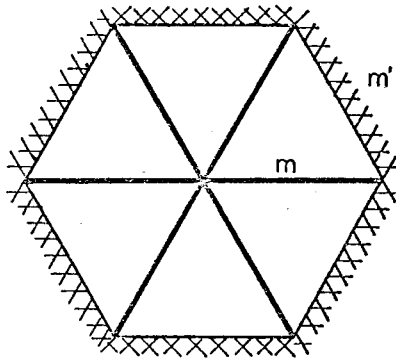


Fig. E6.1 b

Aplicando trabajos virtuales se tiene:

$$m' \cdot 6 + m \cdot 6 = p \cdot \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$m' + m = p \cdot \frac{6^2}{8} "$$

Si:

$$m' = 2 \cdot m$$

$$3 \cdot m = p \cdot \frac{6^2}{8} " \quad m = \frac{36}{24} \cdot p = 1,50 \cdot p$$

$m = 1,50 \cdot p$
--------------------

EJERCICIO E6.2

1) En la placa de la figura E6.2a se pide determinar la carga uniforme  $p$  que produce la rotura, supuesta la placa armada isótropa y con un momento de rotura positivo (tracciones cara inferior)  $m = 4 \text{ m.t/m}$  y un momento de rotura negativo  $m' = 6 \text{ m.t/m}$ .

2) Supuesta la placa anterior apoyada simplemente en todo su contorno y cargada uniformemente con  $2 \text{ t/m}^2$ , se pide el máximo momento flector con un error menor del 10%, calculado según la teoría elástica.

El coeficiente de Poisson vale 0,20

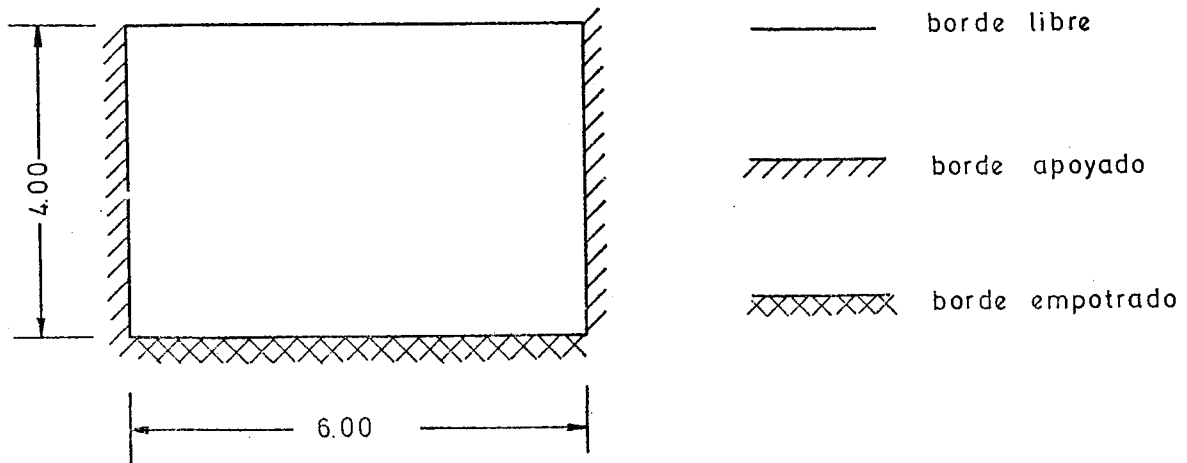


Fig. E6.2a

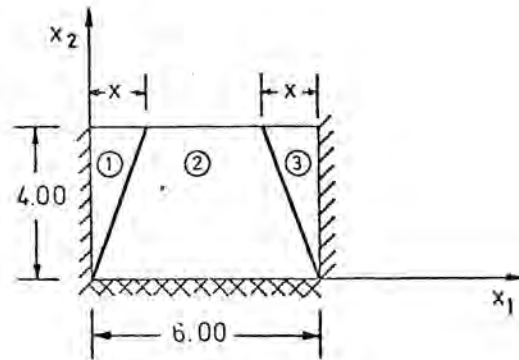


Fig. E 6. 2 b

Según los datos del enunciado se tiene:

$$\left. \begin{aligned} m &= 4 \cdot \frac{m \cdot t}{m} \\ m' &= 6 \cdot \frac{m \cdot t}{m} \end{aligned} \right\} m' = \frac{3}{2} m$$

Como en el borde libre aparecen fuerzas nodales - se aplica el método de los trabajos virtuales.

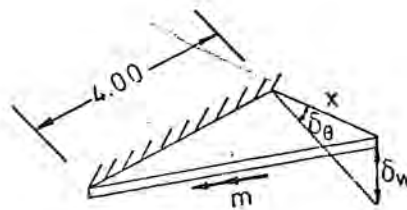


Fig. E 6. 2 c

considerando la figura E6.2c se tiene:

$$W_{ext} = \frac{1}{2} 4 \cdot x \cdot p \cdot \frac{\delta w}{3}$$

$$-W_{int} = m \cdot 4 \cdot \frac{\delta w}{x}$$



$$\frac{dm}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{dm}{dx} = \phi \cdot \frac{(144 - 32 \cdot x) \cdot (96 + 45 \cdot x) - (144 - 16 \cdot x^2) \cdot 45}{(45 \cdot x + 96)^2} = 0$$

$$15 \cdot x^2 + 64 \cdot x - 288 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 + 15 \cdot 288}}{15} \quad ; \quad \boxed{x = 2,74 \text{ m}}$$

En ese caso y, como  $m = 4 \cdot \frac{m \cdot t}{m}$

$$p = m \cdot \frac{96 + 45 \cdot x}{144 \cdot x - 16 \cdot x^2} = 4 \cdot \frac{96 + 45 \cdot 2,74}{(144 - 16 \cdot 2,74) \cdot 2,74} = 3,196 \text{ t/m}^2$$

$$\boxed{\phi = 3,196 \text{ t/m}^2}$$

2.- Tomando un sólo término del desarrollo de Fourier en la solución de Navier se garantiza que el error es menor del - 10%.

$$Z_{11} = \frac{2 \int_0^6 \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot dx_1 \cdot \int_0^4 \sin \frac{\pi \cdot x_2}{4} \cdot dx_2}{\frac{6 \cdot 4}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4} \cos \frac{\pi \cdot x_1}{6} \Big|_6^0 \cdot$$

$$\cdot \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi \cdot x_2}{4} \Big|_4^0 = \frac{8}{\pi^2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{32}{\pi^2}$$

$$W_{11} = \frac{Z_{11}}{D \left[ \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{16} \right]^2} = \frac{32/\pi^2}{D \cdot \pi^4 \cdot \frac{4+9}{9 \cdot 16}} = \frac{32 \cdot 9^2 \cdot 16^2}{13^2 \cdot \pi^6 \cdot D} = \frac{4}{D}$$

$$W(x_1, x_2) = \frac{4}{D} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{4}$$



$$W_{,11} = -\frac{4}{D} \cdot \frac{\pi^2}{36} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{4} = \frac{-\pi^2}{9 \cdot D} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{4}$$

$$W_{,22} = -\frac{4}{D} \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{4} = \frac{-\pi^2}{4 \cdot D} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_2}{4}$$

$$W_{,12} = \frac{4}{D} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_2}{4} = \frac{\pi^2}{6 \cdot D} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_1}{6} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_2}{4}$$

$$m_{11} = -D (W_{,11} + \nu \cdot W_{,22})$$

$$m_{22} = -D (W_{,22} + \nu \cdot W_{,11})$$

$$m_{12} = -D(1 - \nu) \cdot W_{,12}$$

$$\text{máximo } m_{11} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad (m_{11})_{\text{máx}} = \frac{\pi^2}{9} + 0,20 \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1,59 \text{ m.t/m}$$

$$\text{máximo } m_{22} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad (m_{22})_{\text{máx}} = \frac{\pi^2}{4} + 0,20 \cdot \frac{\pi^2}{9} = 2,68 \text{ m.t/m}$$

$$\text{máximo } m_{12} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{matrix} \quad (m_{12})_{\text{máx}} = -0,8 \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

<p>MAXIMO MOMENTO FLECTOR: <math>m_{22} \Big]_{\substack{x_1 = 3 \\ x_2 = 2}} = 2,687 \text{ m.t/m}</math></p>
--

### EJERCICIO E6.3

La placa exágono regular de la figura E6.3a, está sometida a una carga uniforme de intensidad  $p$ . El momento de rotura positivo es  $m$  y el negativo  $m'$ .

SE PIDE:

- 1).- Razonar la figura de rotura y plantear el método de cálculo de la carga de rotura.
- 2).- Determinar la carga de rotura  $p$  en los dos casos siguientes:
  - Empotramiento en todos los bordes del contorno.
  - Apoyo simple en todos los bordes del contorno.

Se supone el lado del exágono de  $6\text{ m}$ ,  $m = 2\text{ m.t/m}$  y  $m' = 4\text{ m.t/m}$

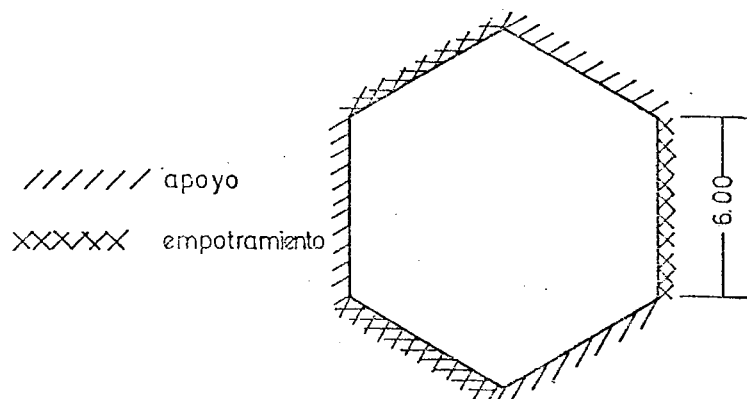


Fig. E6.3a

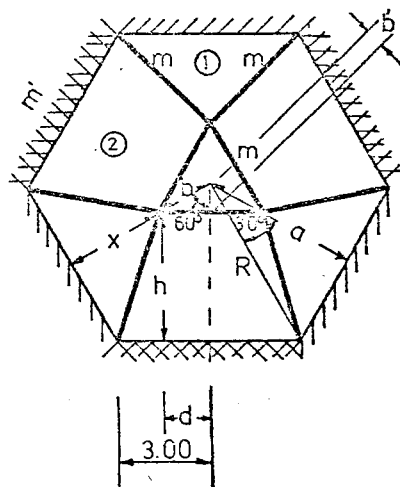


Fig. E6.3 b

Considerando la figura E6.3b se tiene:

$$m' = 2.m ; R = L = 6,00$$

$$a = R.\cos 30^\circ = R.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.\sqrt{3}$$

$$b = a - x = 3.\sqrt{3} - x$$

$$b' = b.\cos 60^\circ = \frac{3.\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{2}$$

$$h = a - b' = 3.\sqrt{3} - \frac{3.\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{3.\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} ; h = \frac{3.\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2}$$

$$d = b.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} . (3.\sqrt{3} - x) = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.x ; d = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.x$$

Efectuando el equilibrio del triángulo ① de la figura E6.3b se tiene:

$$6.m = \frac{1}{2}.6.x.p.\frac{x}{3} = p.x^2 ; 6.m = p.x^2 \quad \{E6.3a\}$$

Efectuando el equilibrio del triángulo ② de la figura E6.3b se tiene:

$$6.m + 6.m' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3-d) \cdot h \cdot p \cdot \frac{h}{3} + 2 \cdot d \cdot h \cdot p \cdot \frac{h}{2} = \frac{p}{3} \cdot h^2 \cdot (3-d) + p \cdot h^2 \cdot d =$$

$$\frac{p \cdot h^2}{3} \cdot (3-d+3d) = \frac{p \cdot h^2}{3} \cdot (3+2 \cdot d)$$

$$18.m = \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sqrt{3} + x)^2 \cdot (3 + 9 - \sqrt{3} \cdot x) = \frac{p}{12} \cdot (3 \cdot \sqrt{3} + x)^2 \cdot (12 - \sqrt{3} \cdot x) =$$

$$18.m \quad \{E6.3b\}$$

Igualando los momentos  $m$  obtenidos en  $\{E6.3a\}$  y  $\{E6.3b\}$  queda:

$$3 \cdot p \cdot x^2 = \frac{p}{12} \cdot (27 + x^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot x) \cdot (12 - \sqrt{3} \cdot x) ;$$

$$36 \cdot x^2 = 12 \cdot 27 - 27 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 12 \cdot x^2 - \sqrt{3} \cdot x^3 + 72 \cdot \sqrt{3} \cdot x - 18 \cdot x^2 ;$$

$$\sqrt{3} \cdot x^3 + 42 \cdot x^2 - 45 \cdot \sqrt{3} \cdot x - 12 \cdot 27 = 0$$

Haciendo el cambio  $u = \sqrt{3} \cdot x$  la ecuación se transforma en:

$$\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot u^3 + 42 \cdot 3 \cdot u^2 - 45 \cdot 3 \cdot u - 12 \cdot 27 = 0 ; \quad 9 \cdot u^3 + 9 \cdot 14 \cdot u^2 -$$

$$9 \cdot 15 \cdot u - 9 \cdot 36 = 0$$

$$u^3 + 14 \cdot u^2 - 15 \cdot u - 36 = 0$$

1	14	-15	-36
2	2	32	34
1	16	17	<u>-2</u>

1	14	-15	-36
3	3	51	108
1	17	36	<u>72</u>

Se observa que la raíz de la ecuación está entre 2 y 3, pero más cerca de 2;  $2 < u_0 < 3$ .

Por tanto  $2.\sqrt{3} < X_0 < 3.\sqrt{3}$  . Es decir, la forma de rotura es la representada en la figura E6.3b

2a).- Caso de empotramiento en todos los bordes:

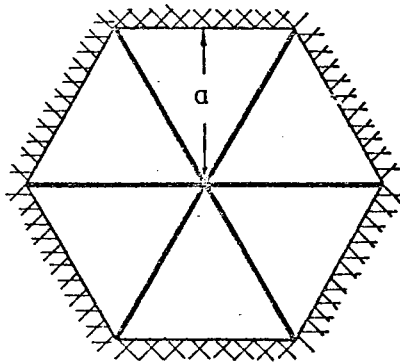


Fig. E6.3c

Teniendo en cuenta la figura E6.3c se tiene:

$$a = 3.\sqrt{3} \quad ; \quad 6.m + 6.m' = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a \cdot p \cdot \frac{a}{3} \quad ;$$

$$18.m = p \cdot a^2 = p \cdot 9 \cdot 3 = 27.p \quad ; \quad p = \frac{18}{27}.m \quad ; \quad \text{como } m = 2 \quad ;$$

$$p = \frac{36}{27} = \frac{4.9}{3.9} = \frac{4}{3} \text{ t/m}^2$$

$$p_{\text{empotramiento}} = \frac{4}{3} \text{ t/m}^2$$

2b).- Apoyo simple en todos los bordes

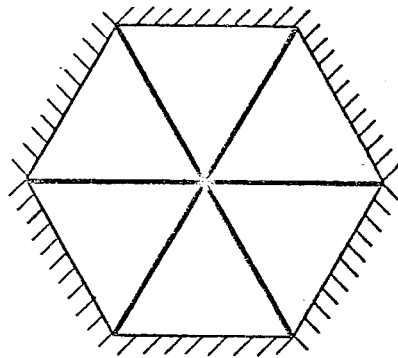


Fig. E 6.3 d

$$6 \cdot m = p \cdot a^2 = 27 \cdot p ; p = \frac{6 \cdot m}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 3} = \frac{4}{9} \text{ t/m}^2$$

$$P_{\text{apoyo simple}} = \frac{4}{9} \text{ t/m}^2$$

Se observa que:

$$P_{\text{empotramiento}} = 3 \cdot P_{\text{apoyo simple}}$$

En el caso de empotramiento-apoyo:

$$p_{e-a} = \frac{6 \cdot m}{x_0^2} = \frac{12}{x_0^2}$$

$$\frac{12}{(2 \cdot \sqrt{3})^2} > p_{e-a} > \frac{12}{(3 \cdot \sqrt{3})^2} ; 1 > p_{ea} > \frac{4}{9}$$

Y  $p_{e-a}$  está más cercana de  $1 \text{ t/m}^2$ , luego también más cerca de  $P_{\text{empotramiento}} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ t/m}^2$

EJERCICIO E6.4

Determinar la forma y el momento  $m$  de rotura de las losas isótropas de la figura E6.4a, sometidas a una carga uniforme  $p = 2 \text{ t.m}^{-2}$ .

Si  $m$  es el momento de rotura positivo en la losa, los momentos de empotramiento (negativos) son, en valor absoluto,  $k_m$ ,  $k_1 m$ ,  $k_2 m$  y  $k_3 m$ , según el caso.

$$k_1 \quad k_2 = k_1 + 1 \quad k_3 = k_1 + 2$$

$$k = \frac{1}{3} \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \quad a = 12 \text{ m.}$$

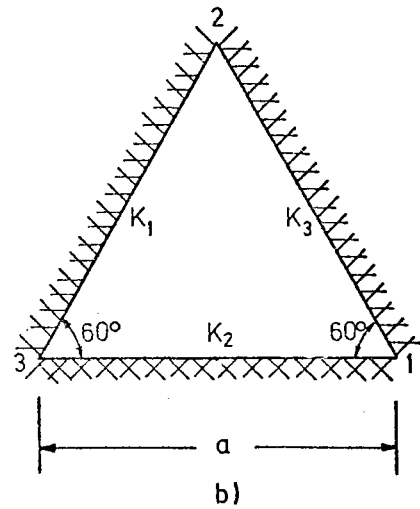
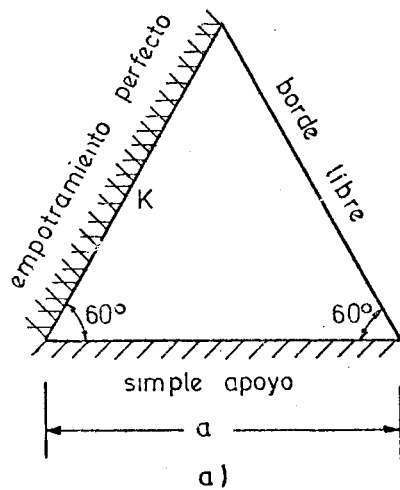


Fig. E6. 4 a

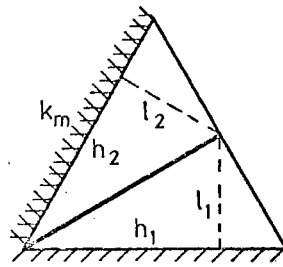


Fig. E6.4 b

Si se considera la figura E6.4b se puede poner:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot L_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot L_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} ; \quad L_1 + L_2 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} ; \quad h_1 = a - \frac{L_1}{\sqrt{3}} ;$$

$$h_2 = a - \frac{L_2}{\sqrt{3}}$$

aplicando trabajos virtuales:

$$m \cdot h_2 \cdot \frac{\delta w}{L_2} + k \cdot m \cdot a \cdot \frac{\delta w}{L_2} + m \cdot h_1 \cdot \frac{\delta w}{L_1} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot L_1 \cdot p \cdot \frac{\delta w}{3} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot L_2 \cdot p \cdot \frac{\delta w}{3}$$

$$m \cdot \left( \frac{h_2}{L_2} + \frac{ka}{L_2} + \frac{h_1}{L_1} \right) = \frac{p \cdot a}{6} \cdot (L_1 + L_2) ; \quad m = \frac{p \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_2}{L_2} + \frac{ka}{L_2}} ;$$

Llamando u a:

$$u = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_2}{L_2} + \frac{ka}{L_2} = \frac{a}{L_1} + \frac{a}{L_2} + \frac{ka}{L_2} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a}{L_1} + \frac{a(k+1)}{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} - L_1} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para hallar los valores estacionarios:

$$\frac{dm}{dL_1} = 0$$

pero se pueden hallar igualmente para:

$$\frac{du}{dL_1} = 0$$



$$-\frac{a}{L_1^2} + \frac{a \cdot (k+1)}{\left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} - L_1\right)^2} = 0 ; \quad \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} - L_1 = \sqrt{k+1} \cdot L_1 \rightarrow (1+\sqrt{k+1}) \cdot L_1 =$$

$$= \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$L_1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (1+\sqrt{k+1})} \quad L_2 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{1+\sqrt{k+1}}$$

$$u = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{k+1})}{\sqrt{3}} + \frac{2 \cdot (k+1) \cdot (1+\sqrt{k+1})}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} (\sqrt{k+1} + (k+1) +$$

$$+ (k+1) \cdot (1+\sqrt{k+1}) - \sqrt{k+1})$$

$$u = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{k+1}} \cdot (k+1) \cdot (2+\sqrt{k+1}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{k+1} \cdot (2+\sqrt{k+1}); \quad m = \frac{p \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{u} =$$

$$= \frac{p \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{k+1} \cdot (2+\sqrt{k+1})}$$

$$m = \frac{p \cdot a^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1} \cdot (2+\sqrt{k+1})}$$

b)

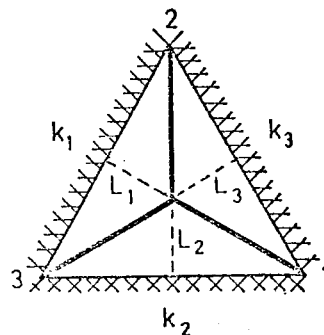


Fig. E6.4 c

Considerando la figura E6.4c se tiene:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \quad ; \quad L_1 + L_2 + L_3 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

por equilibrio:

$$m \cdot a + k_1 \cdot m \cdot a = \frac{1}{2} \cdot p \cdot a \cdot L_1 \cdot \frac{L_1}{3} \rightarrow m = \frac{p}{6} \cdot \frac{L_1^2}{1+k_1}$$

Análogamente para los demás triángulos, con lo que queda:

$$\frac{p}{6} \cdot \frac{L_1^2}{1+k_1} = \frac{p}{6} \cdot \frac{L_2^2}{1+k_2} = \frac{p}{6} \cdot \frac{L_3^2}{1+k_3} \quad \frac{L_1}{\sqrt{1+k_1}} = \frac{L_2}{\sqrt{1+k_2}} = \frac{L_3}{\sqrt{1+k_3}}$$

$$L_2 = \frac{\sqrt{1+k_2}}{\sqrt{1+k_1}} \cdot L_1 \quad ; \quad L_3 = \frac{\sqrt{1+k_3}}{\sqrt{1+k_1}} \cdot L_1 \quad ; \quad \frac{\sqrt{1+k_2}}{\sqrt{1+k_1}} + \frac{\sqrt{1+k_3}}{\sqrt{1+k_1}} + 1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

con esto:

$$L_1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+k_1}}{\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_3}} \quad ;$$

$$L_2 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+k_2}}{\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_3}} \quad ; \quad L_3 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+k_3}}{\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_3}}$$

$$m = \frac{p \cdot a}{8} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_3})^2}$$

EJERCICIO E6.5

En la placa rectangular de la figura E6.5a simplemente apoyada en todo su contorno, y con armaduras cruzadas de doble cuantía en la dirección  $oy$  que en la  $ox$ , - hallar la forma y momentos de rotura cuando una carga uniformemente repartida  $q = 500 \text{ kp/m}^2$  actúa sobre la placa.

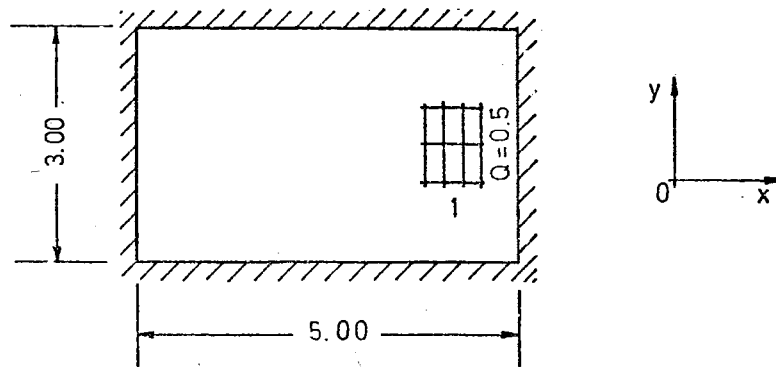


Fig. E6.5a

Siendo  $\phi$  el que se indica en la figura E6.5a se transforma la placa dada en una afín con momento de rotura uniforme teniéndose:

$$\lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

Se multiplica la longitud según ox por  $\lambda$  :

$$5,00 \cdot \sqrt{2} = 7,07 \text{ m}$$

y queda la figura E6.5b

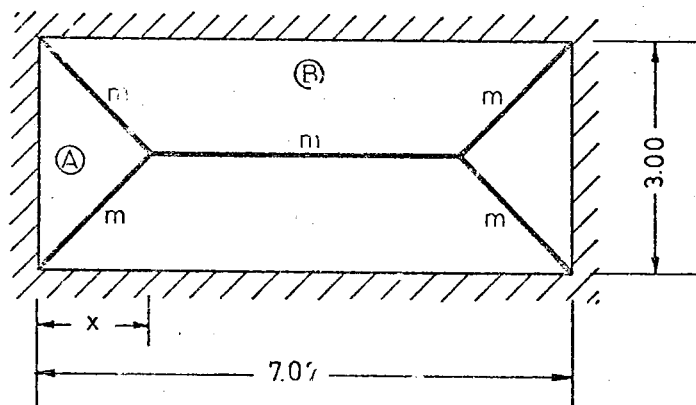


Fig. E6.5 b

Aplicando equilibrio a los trozos (A) y (B) de la figura E6.5b se tiene:

$$\textcircled{A} : 3 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \cdot q \cdot \frac{x}{y} = q \cdot \frac{x^2}{2} ; \quad \boxed{m = q \cdot \frac{x^2}{6}} \quad \{E6.5a\}$$

$$\textcircled{B} : 7,07 \text{ m} = \frac{x}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x \cdot q \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot (7,07 - 2 \cdot x) \cdot q \cdot \frac{3}{4} ;$$

$$\boxed{7,07 \text{ m} = \frac{3}{4} \cdot q \cdot x + \frac{9}{8} \cdot (7,07 - 2x) \cdot q}$$

Igualando los dos momentos de cada porción (A) y (B) se tiene:

$$7,07 \cdot q \cdot \frac{x^2}{6} = \frac{3}{4} \cdot q \cdot x + \frac{9}{8} \cdot (7,07 - 2 \cdot x) \cdot q$$

$$7,07 \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} \cdot (7,07 - 2 \cdot x)$$

$$7,07 \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} \cdot 7,07 - \frac{9}{2} \cdot x = \frac{9}{4} \cdot 7,07 - 3 \cdot x$$

$$7,07 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 6,75 \cdot 7,07 = 0 ; x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 6,75 \cdot 7,07^2}}{2 \cdot 7,07} =$$

$$= 2,038$$

Sustituyendo en {E6.5a} con  $q = 0,5 \text{ t/m}$  resulta:

$$m = 0,347 \frac{\text{t} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

En la losa inicial y según se ve en la figura E6.5c se tiene:

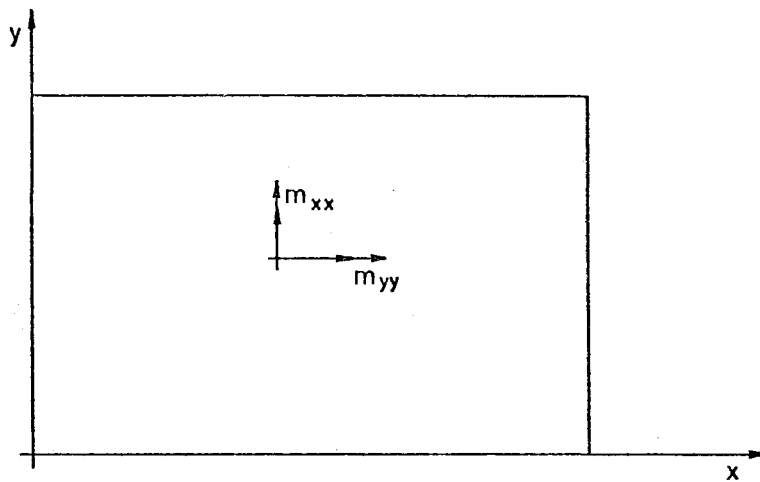


Fig- E 6.5 c

$$m_{yy} = m = 0,347 \frac{m \cdot t}{m}$$

$$m_{xx} = 0,5 \cdot m = 0,1735 \frac{m \cdot t}{m}$$

EJERCICIO E6.6

Hallar la forma y momento de rotura en la placa -  
isótropa de la figura E6.6a cargada con una sobrecarga uni-  
forme de intensidad  $p$ .

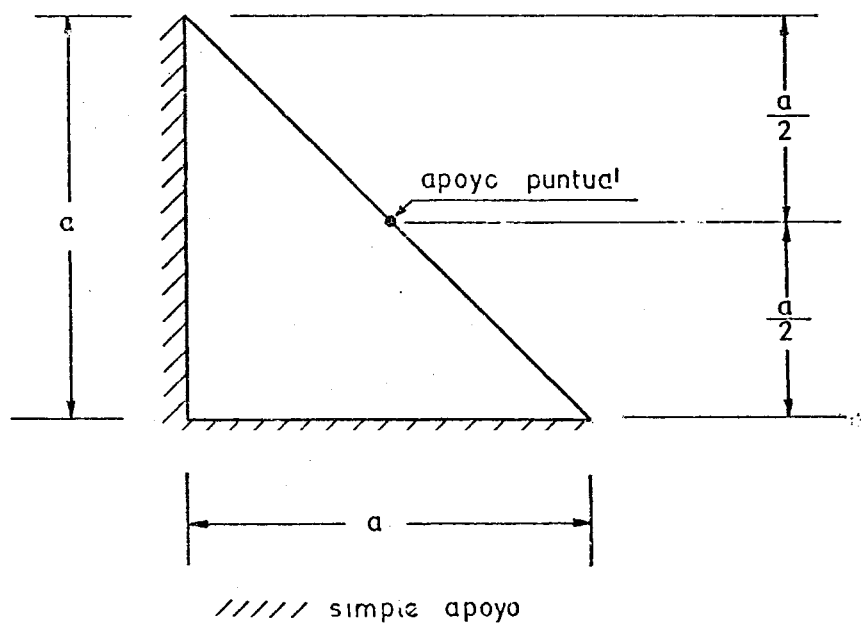


Fig. E6.6 a

Se tantean dos formas de rotura, las de las figuras E6.6b y E6.6c.

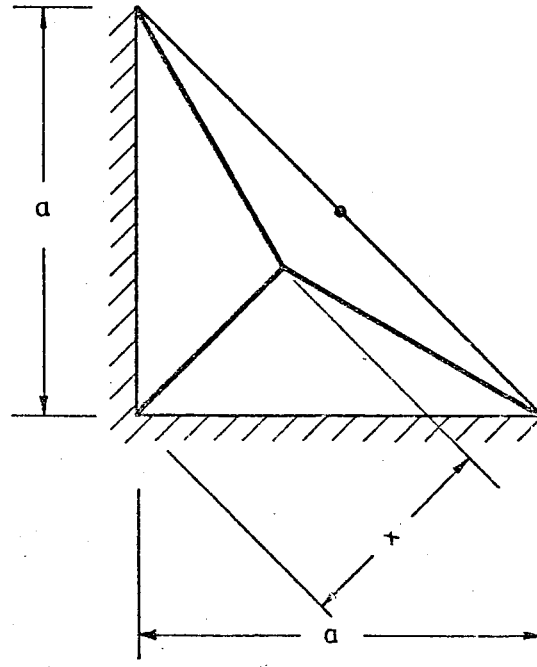


Fig. E6.6b

Si se considera la figura E6.6b se tiene:

$$W_{int} + W_{ext} = 0$$

$$W_{int} = 2 \cdot \frac{1}{x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot m \cdot a + \frac{1}{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - x} \cdot m \cdot a \cdot \sqrt{2}$$

$$W_{ext} = 2 \cdot p \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + p \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot (a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - x) \cdot \frac{1}{6}$$

por lo tanto:

$$m \cdot \left( \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{x} + \frac{2}{a - x \cdot \sqrt{2}} \right) = \frac{p}{6} (x \cdot \sqrt{2} + a - x \cdot \sqrt{2})$$



$$m = \frac{p \cdot a}{2} \cdot \frac{a \cdot x - x^2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot a - x}$$

$$\frac{dm}{dx} = 0$$

$$(a - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2}) \cdot (a \cdot \sqrt{2} - x) + a \cdot x - x^2 \cdot \sqrt{2} = 0$$

$$a^2 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot a \cdot x + x^2 \cdot \sqrt{2} = 0$$

$$x = a \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

$$m_{\text{máx}} = m_{\text{rotura}} = \frac{p \cdot a^2}{12} \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \approx 0,015 p \cdot a^2$$

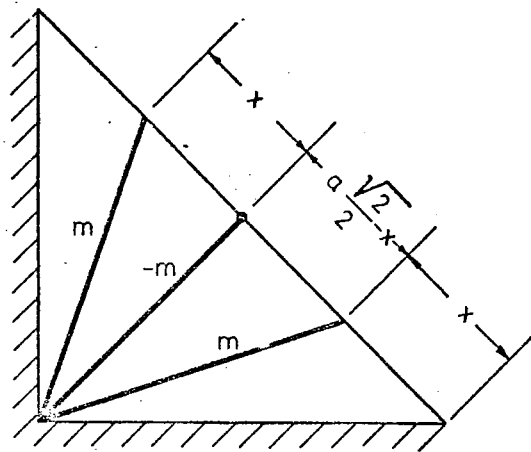


Fig. E6.6 c

Según la figura E6.6c y haciendo  $W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = 0$ , se tiene:

$$W_{int} = 2 \cdot \left(a - x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot m \cdot \frac{\sqrt{2}}{x} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{2}} - x} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot m$$

$$W_{ext} = 2 \cdot p \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot a + 2 \cdot p \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{p \cdot a^2}{6}$$

luego:

$$m = \frac{p \cdot a^2}{12} \cdot \frac{1 - \frac{x \cdot \sqrt{2}}{a}}{\frac{a \cdot \sqrt{2}}{x} + \frac{x \cdot \sqrt{2}}{a} - 1}$$

$$\frac{dm}{dx} = 0 \quad x = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{4}$$

$$m = \frac{p \cdot a^2}{12} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{p \cdot a^2}{84} < 0,015 \cdot p \cdot a^2$$

Luego el momento de rotura será el que para igual carga es de mayor magnitud:

$$m_{rotura} = 0,015 \cdot p \cdot a^2$$

y la forma de rotura es la figura E6.6b.

En una placa isotrópa de planta poligonal simplemente apoyada en su contorno de la figura E6.1a., y que se supone esta circunscrita a un círculo de radio  $r$  y centro  $O$ . Sean  $m$  y  $m'$  los momentos de roturas positivo y negativo de la placa.

Determinar el valor de rotura de una carga puntual aplicada en  $O$ , en función de  $m$ ,  $m'$  y de sus características geométricas.

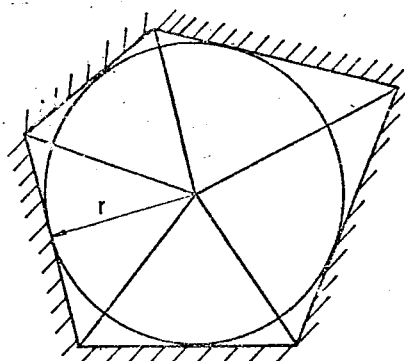


Fig. E 6.7 a

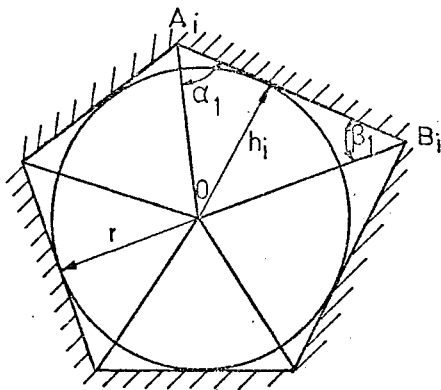


Fig. E6.7b

Teniendo en cuenta la -  
figura E6.7b. Se aplica  
el principio de los tra-  
bajos virtuales, supo-  
niendo un descenso ver-  
tical unitario del pun-  
to O.

Trabajo exterior: P.

Trabajo interno de un -  
triángulo de placa  $OA_iB_i$ :

$$m \overline{A_iB_i} \frac{1}{h_i} = \frac{S_i}{h_i} m$$

Luego:

$$P = m \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{h_i}$$

con N número de lados del polígono.

En este caso  $h_i = r$  para todo i, resultando:

$$P = m \frac{S}{r}$$

con  $S = \sum_{i=1}^N S_i =$  perímetro del polígono exterior.

Ejercicio E6.8.

Sea una placa isotropa poligonal convexa de  $N$  lados, con vertices de coordenadas  $(x_i, y_i)$ , simplemente apoyada en su contorno. Se desea determinar la posición y valor de la carga de rotura puntual  $P$ . El momento positivo de rotura es  $m$ .

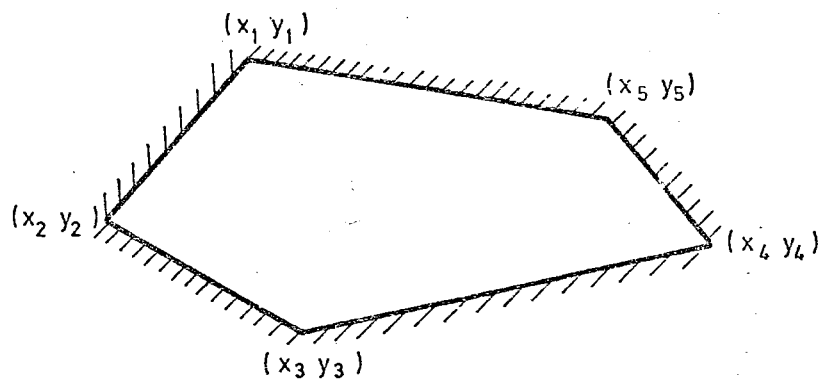


Fig. E6.8 a

Según se han obtenido en el anterior ejercicio, -  
se puede escribir:

$$P = m \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{h_i} \quad \{E6.8a.\}$$

En este caso, para el lado de vertices  $(x_i, y_i)$ ,  
 $(x_{i+1}, y_{i+1})$  la ecuación es:

$$a_i x + b_i y + c_i = 0$$

$$\text{con } a_i = y_{i+1} - y_i \quad b_i = x_i - x_{i+1} \quad c_i = y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i$$

$$\text{Por lo tanto } s_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad h_i = \frac{a_i u + b_i v + c_i}{s_i}$$

siendo  $u, v$  las coordenadas del punto de aplicación de  $P$ .

La ecuación  $\{E6.8a.\}$  se convierte, entonces en  
la siguiente:

$$P = m \sum_{i=1}^N \frac{a_i^2 + b_i^2}{a_i u + b_i v + c_i}$$

El punto de aplicación se obtiene, mediante la -  
condición de mínimo de  $P$ , resultando:

$$\sum_{i=1}^N \frac{a_i (a_i^2 + b_i^2)}{(a_i u + b_i v + c_i)^2} = 0 \quad \sum_{i=1}^N \frac{b_i (a_i^2 + b_i^2)}{(a_i u + b_i v + c_i)^2} = 0$$

Se puede demostrar por consideraciones geométricas que las siguientes cotas inferiores de  $P$  existen:

$$P > 2\pi m, \quad P > 2N \operatorname{tg} \frac{\pi}{N} m \quad P \geq 2m \sum_{i=1}^N \cot \gamma_i$$

con  $\gamma_i$  los ángulos interiores del polígono.

Como aplicación hallar la carga de rotura  $P$  de la placa de la figura E6.8b.

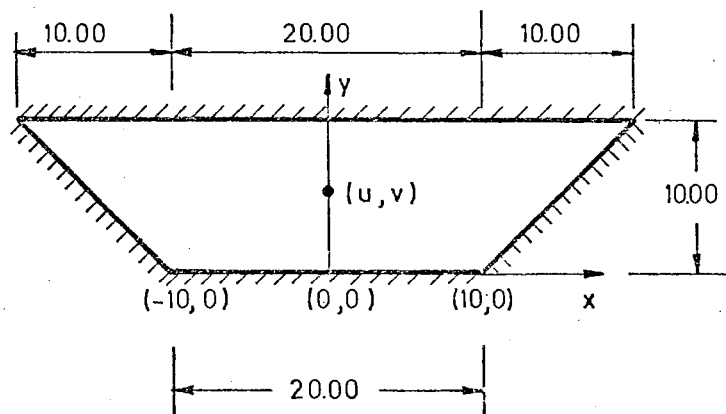


Fig E6.8 b

Se tiene:

$$\frac{P}{m} = \frac{20}{v} + \frac{40}{10-v} + 2 \frac{10\sqrt{2}}{\frac{10+v}{\sqrt{2}}}$$

$$-\frac{1}{v^2} + \frac{2}{(10-v)^2} - \frac{2}{(10-v)^2} = 0, \quad 80v^3 = (10^2 - v^2)^2$$

$$v = 4,348 \text{ m.}$$

$$P = m(4,5998 + 7,0771 + 2,7878) = 14,465 \text{ m.}$$

Se comprueba que se cumplen las desigualdades:

$$P > 2\pi m = 6,283 \text{ m.}$$

$$P > 8 \tan \frac{\pi}{4} m = 8,000 \text{ m.}$$

$$P > 2m(2 + 2) = 8,000 \text{ m.}$$

Ejercicio E6.9.

Hallar la carga de rotura de una placa isótropa circular de radio  $r$  simplemente apoyada en su contorno. - Se supone la actuación de una carga puntual distante  $e$  del centro de la placa. El momento de rotura positivo de la placa es  $m$  y el negativo  $m'$ . (Figura E6.9a.).

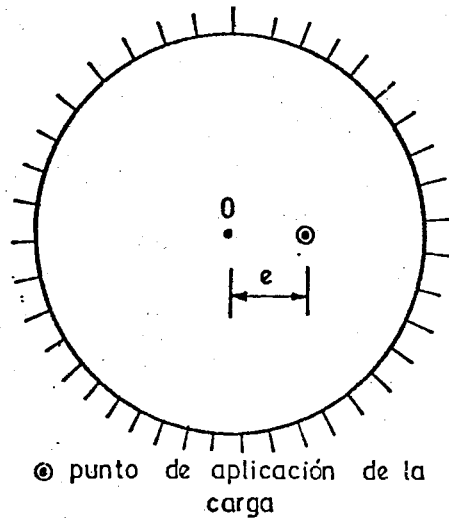


Fig. E6.9a



La teoría general se puede ver en el apéndice de este ejercicio, y allí se detallan los parámetros que se van a utilizar.

Se adoptan coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , con origen en el punto de aplicación de la carga y radio vector origen el radio de la circunferencia que pasa por el centro. (figura E6.9b.).

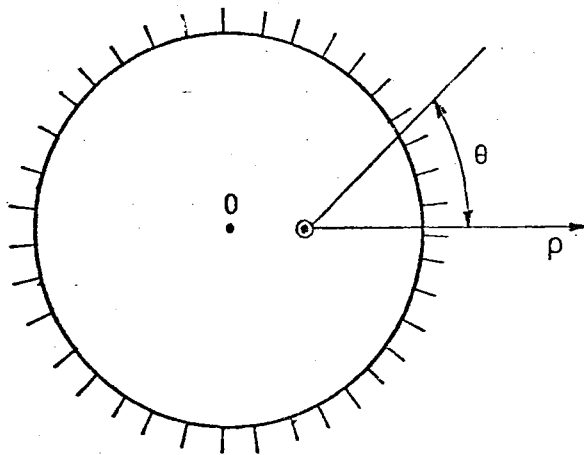


Fig. E6.9 b

La ecuación del círculo es:

$$\rho = -e \cos \theta + \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \theta}$$

La fórmula que expresa la carga de rotura  $\underline{P}$  es:

$$\frac{P}{m} = \oint \frac{dS}{h}$$

con  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\rho}{\rho'}$ ,  $dS = \frac{\rho d\theta}{\operatorname{sen} \gamma}$  y  $h = \rho \operatorname{sen} \gamma$ . Resulta:

$$\frac{P}{m} = \oint \frac{d\theta}{\sin^2 \gamma} = \oint \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) d\theta$$

Si existen discontinuidades en  $\rho'$  deberán ser -  
tenidas en cuenta en el cálculo de la integral.

Así pues, resulta:

$$\frac{P}{m} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{r^2 - e^2 \sin^2 \theta}\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 d\theta}{r^2 - e^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{\sin \alpha_0} \quad \{E6.9a\}$$

$$\text{con } \cos \alpha_0 = \frac{e}{r}.$$

La forma de rotura se indica en la figura E6.9c.

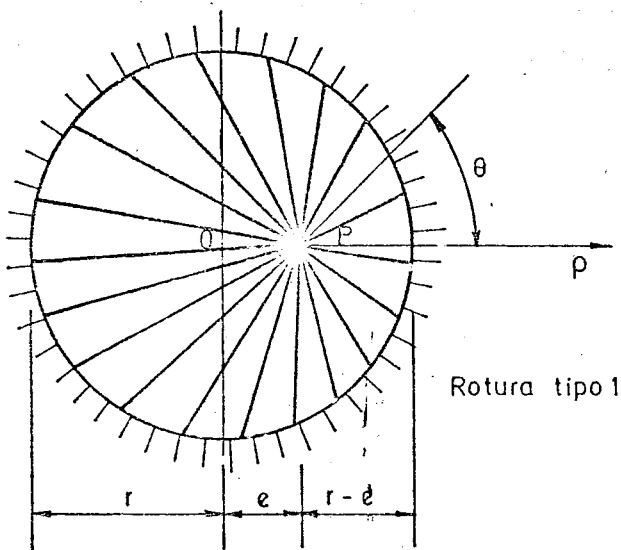


Fig. E6.9 c

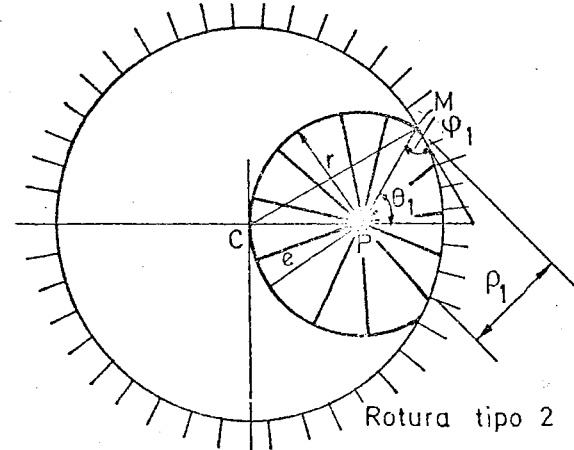


Fig. E6.9 d

$$P = \frac{2\pi m}{\sin \alpha_0}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{e}{r}, \quad \sin \alpha_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{e}{r}\right)^2}$$

Otra posibilidad de rotura se muestra en la figura E6.9d., en -  
donde aparecen momentos negativos.  
La carga de rotura es:

$$P = \frac{2m}{\sin \alpha_0} \arctg\{\sin \alpha_0 \operatorname{tg} \theta_1\} + 2(m+m')(n-\theta_1)$$

$$\cos \alpha_0 = \frac{e}{r}, \quad \sin \alpha_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{e}{r}\right)^2}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{r}{e} \mu \quad \text{con } \mu = \frac{m'}{m+m'}$$

$$P = 2m \int_0^{\theta_1} \frac{r^2 d\theta}{r^2 - e^2 \sin^2 \theta} + 2(m+m')(\pi - \theta_1) =$$

$$\frac{2m}{\sin \alpha_0} \arctg\{\sin \alpha_0 \operatorname{tg} \theta_1\} + 2(m+m')(\pi - \theta_1)$$

{E6.9b}

El angulo  $\psi_1$  se obtiene de la teoría general, resultando:

$$\sin \psi_0 = \sqrt{\mu} \quad \sin \gamma = \sqrt{\mu} \quad \text{y} \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi_0$$

Del triangulo CPM se deduce  $\frac{\sin \theta_1}{r} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \psi_1)}{e}$   
 $\sin \theta_1 = \frac{r}{e} \sqrt{\mu}$ , (se debe adoptar el menor valor de  $\theta_1$ ).

El radio  $\rho$ , de la línea de rotura negativa es, - por lo tanto

$$\rho = r \frac{-\cos(\theta_1 + \psi_1)}{\sin \theta_1}$$

El valor límite de  $e$  para que sea posible esta línea de rotura es,  $\sin \theta_1 = 1 = \frac{r}{e} \sqrt{\mu}$ . Por lo tanto

$$e_{\text{límite}} = r \sqrt{\mu}, \text{ es decir } r \geq e \geq e_{\text{límite}}$$

Así pues en la tabla de la figura E6.9e. se indican los siguientes valores de la carga de rotura que será el valor de  $P$  menor entre las dos expresiones {E6.9a.} y {E6.9b.}.

Los valores genéricos de  $P/2\pi m$  en cada caso son:

$$\frac{P}{2\pi m} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{e}{r})^2}} - \text{tipo de rotura 1}$$

$$\frac{P}{2\pi m} = \pi \sqrt{1 - (\frac{e}{r})^2} \arctg\{\sqrt{1 - (\frac{e}{r})^2} \operatorname{tg}\theta_1\} + \frac{1}{1-\mu}(1 - \frac{\theta_1}{\pi}) \text{ tipo de rotura 2}$$

VALORES DE $P/2\pi m$						
e/r	Tipo 1 cualquier	Tipo 2 $\mu = m'/(m+m')$				
		$\mu=0,01$	$\mu=0,25$	$\mu=0,50$	$\mu=0,75$	$\mu=0,99$
0	1.000	-	-			
0,05	1.001	-	-			
0,10	1.005	1.008	-			
0,15	1.011	1.009	-			
0,20	1.021	1.009	-			
0,25	1.033	1.009	-			
0,30	1.048	1.009	-			
0,35	1.068	1.009	-			
0,40	1.091	1.010	-			
0,45	1.120	1.010	-			
0,50	1.155	1.010	1.244	-	-	
0,55	1.197	1.010	1.256	-	-	
0,60	1.250	1.010	1.265	-	-	
0,65	1.316	1.010	1.271	-	-	
0,70	1.400	1.010	1.276	-	-	
0,75	1.512	1.010	1.281	1.736	-	
0,80	1.667	1.010	1.284	1.760	-	
0,85	1.898	1.010	1.288	1.778	-	
0,90	2.294	1.010	1.290	1.794	3.078	-
0,95	3.203	1.010	1.293	1.807	3.157	-
0,99	7.089	1.010	1.294	1.816	3.207	-

Fig. E6.9 e

APENDICE: Teoría general

A. Borde empotrado (Figura E6.9f.).

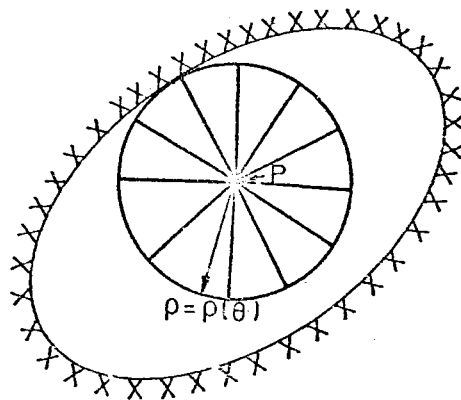


Fig E 6.9 f

La fórmula de una placa poligonal se extiende a curva:

$$\frac{P}{m + m'} = \oint \frac{dS}{h} = \oint \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) d\theta$$

supuesto no existen discontinuidades en el contorno.

Es decir:

$$\frac{P}{m + m'} = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) d\theta$$

La forma de rotura pésima se puede deducir, mediante la expresión de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial F}{\partial \rho'} \right) = 0 = -2 \frac{\rho'^2}{\rho^3} - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{2\rho'}{\rho^2} \right)$$

Resulta:

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \leq 0 \quad \rho = c e^{h\theta}. \text{ Espiral logarítmica}$$

ca con  $h = \frac{\rho'}{\rho} = \cot\gamma$  ( $\gamma$  ángulo del radio vector con la tangente a la línea de rotura).

El valor de carga de rotura es  $P = (m + m')(1 + h^2)2\pi$

En general la curva  $\rho = c e^{h\theta}$  es tangente al contorno.

B. Borde apoyado (Figura E6.9g.).

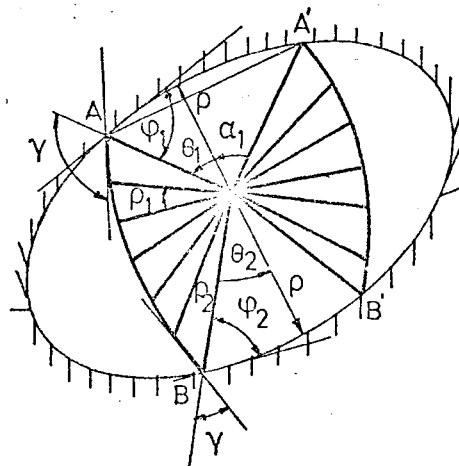


Fig. E6.9g

Curva A.B.

$$\rho = C e^{h\theta}$$

con

$$\rho_1 = C e^{h\theta_1}$$

$$\rho_2 = C e^{h\theta_2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{h(\theta_2 - \theta_1)}$$

La carga de rotura  $P = P_1 + P_2$ . La contribución  $P_1$  se obtiene:

$$P_1 = m \int_{\alpha_1}^{\theta_2} \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) d\rho + (m + m')(1 + h^2)(\theta_2 - \theta_1) + \\ + m \int_{\theta_2}^{\alpha_2} \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) d\rho$$

El mismo de  $P_1$  se obtiene a partir de

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1} = 0 = m \left(1 + \frac{\rho_1'^2}{\rho_1^2}\right) + (m + m') \left\{ 2h \frac{\partial h}{\partial \theta_1} (\theta_2 - \theta_1) - 1 - h^2 \right\}$$

$$\text{Por otra parte } h + (\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \frac{\rho_1'}{\rho_2} \cot \psi_1$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{m+m'} \frac{\partial P}{\partial \theta_1} = \frac{1-\mu}{\sin^2 \psi_1} - 2h \cot \psi_1 + h^2 - 1 = 0, \text{ con}$$

$\mu = \frac{m}{m' + m}$  y considerando  $h = \cot \gamma$ , se deduce la condición de mínimo

$$\sin(\gamma - \psi_1) = \sqrt{\mu} \sin \gamma$$

que permite determinar  $\psi_1$ .

Análogamente se obtendría  $\psi_2$ . En resumen, se procede como sigue: Calcular  $\sin \psi_0 = \sqrt{\mu} \sin \gamma$ , y los ángulos extremos  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son  $\psi_1 = \gamma - \psi_0$   $\psi_2 = (\pi - \gamma) - \psi_0$  en fun-

ción de  $\gamma$ . Conodicos  $\psi_1$  y  $\psi_2$  se deducen  $\gamma$ ,  $\rho$  y  $\rho_2$  por tan  
teos. Las siguientes igualdades son válidas:

$$h = \cot \gamma = \frac{\cos \psi_1 - \sqrt{\mu}}{\operatorname{sen} \psi_1}$$

$$h = \cot \gamma = \frac{-\cos \psi_2 + \sqrt{\mu}}{\operatorname{sen} \psi_2}$$

$$h^2 + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \gamma} = \frac{\mu}{\operatorname{sen}^2 \psi_0}$$

$$\cot \psi_1 + \cot \psi_2 = 2 \frac{m'}{m} \cot \psi_0$$



Ejercicio E6.10.

Determinar la carga de rotura  $P$ , de la placa isotrópica rectangular semi-infinita simplemente apoyada en dos lados opuestos paralelos. (figura E6.10a.). Se supone que las armaduras superior e inferior resisten momentos de rotura de valores  $m$  y  $m'$  respectivamente.

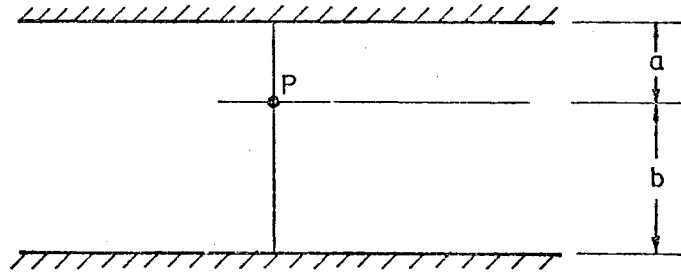


Fig. E6.10 a

a) Se consideran dos tipos de rotura. El primero que se tiene en cuenta es aquél en que siendo  $a < b$  y se indica en la figura E6.10b.

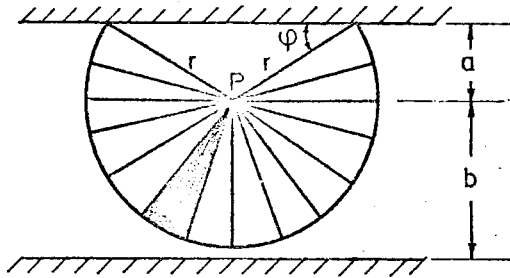


Fig. E6.10b

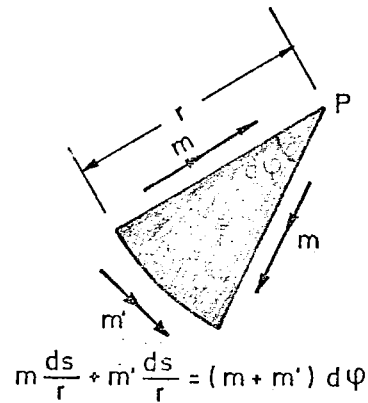


Fig. E6.10c

Aplicando trabajos virtuales se deduce

$$W_e = P \cdot 1$$

$$W_I = 2m \frac{r}{a} + 2(m + m') \left( \frac{\pi}{2} + \psi \right)$$

En donde el trabajo de la zona cónica se deduce de acuerdo con el esquema de la figura E6.10c.

Resulta

$$P = 2m \cot \psi + \left( \frac{\pi}{2} + \psi \right) (m + m')$$

Si se denomina  $\mu = \frac{m'}{m + m'}$

se puede escribir

$$\frac{P}{m + m'} = (1 - \mu) \cot \psi + \frac{\pi}{2} + \psi$$

P tiene que ser mínimo, con lo que se deduce

$$\frac{dP}{d\psi} = 0 \quad \cos\psi = \sqrt{\mu}$$

$$P = 2\left\{\sqrt{\mu(1-\mu)} + \arccos\sqrt{\mu} + \frac{\pi}{2}\right\} (m + m')$$

b) Es el que se considera en la figura E6.10d. también considerando  $a < b$ .

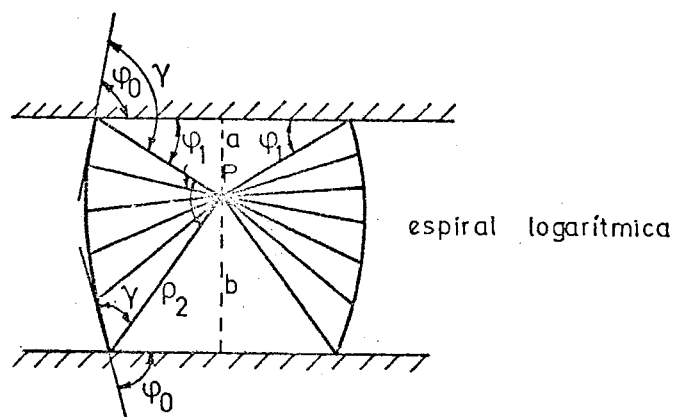


Fig. E 6.10 d

$\rho = C e^{h\theta}$  es la espiral logarítmica, como se ha mostrado en un apéndice anterior. Se cumple:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{h(\theta_2 - \theta_1)} \quad \{E6.10a.\}$$

y  $h = \cot\gamma$

Se sabe que en general se cumple  $\sin\psi_0 = \sin\gamma \sqrt{\mu}$ . Además  $A = \theta_2 - \theta_1 = \pi - 2\psi_0$  y por lo tanto la condición (E6.10a.) se escribe:

$$L \frac{\rho_1}{\rho_2} = h(\pi - 2\psi_0) = L \frac{b \operatorname{sen}(\gamma - \psi_0)}{a \operatorname{sen}(\gamma + \psi_0)}$$

es decir

$$h(\pi - 2\psi_0) = L \frac{b(\cot\psi_0 - h)}{a(\cot\psi_0 + h)} \quad \text{que}$$

se escribe

$$\frac{a}{b} = \frac{\cot\psi_0 - h}{\cot\psi_0 + h} e^{-h(\pi - 2\psi_0)} \quad \{E6.10b.\}$$

Además existe la relación entre  $\psi_0$  y  $h$  como sigue:

$$\operatorname{sen}\psi_0 = \operatorname{sen}\gamma \sqrt{\mu} \quad \{E6.10c.\}$$

que son las ecuaciones {E6.10b.} y {E6.10c.} que permiten calcular los valores de  $\psi_0$  y  $\gamma$  para  $a$ ,  $b$  y  $\mu$  dados.

Y la carga de rotura es directamente, mediante - trabajos virtuales como sigue:

$$\frac{P}{m} = 4 \cot\psi_0 + 2 \frac{\pi - 2\psi_0}{\operatorname{sen}^2\psi_0}$$

Esta fórmula puede ser aproximada por otra más - sencilla que evita la enojosa resolución del sistema de ecuaciones {E6.10b.} y {E6.10c.}, como se indica que es aplicable para  $\mu < 0,75$ .

$$\frac{P}{2(m + m')} \approx 2 \sqrt{\mu(1 - \mu)} + 2 \arccos \sqrt{\mu} + \frac{9 - 4\mu}{30} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right)$$

Los valores extremos que limitan la aplicación de las dos fórmulas correspondientes a los tipos de rotura son ( $a < b$ )

$$\left( \frac{a}{b} \right)_{\text{lím.}} = H - \sqrt{H^2 - 1}$$

con

$$H = 1 + \frac{7,5}{9 - 4\mu} \{ \pi - 2 \sqrt{\mu(1 - \mu)} + 2 \arccos \sqrt{\mu} \}$$

Para  $\frac{a}{b} < \left( \frac{a}{b} \right)_{\text{lím.}}$  se produce el tipo 1 de rotura y  $\frac{a}{b} > \left( \frac{a}{b} \right)_{\text{lím.}}$  el tipo 2 de rotura.

Los valores  $\left( \frac{a}{b} \right)_{\text{lím.}}$  se indican en la tabla siguiente:

$\mu$	= 0	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75
$\left( \frac{a}{b} \right)_{\text{lím.}}$	1	0.760	0.620	0.563	0.511	0.422	0.348	0.284	0.230	0.206

En la figura E6.10e. se dan para distintos valores de  $m$  y  $m'$  y en función de los parámetros característicos los distintos casos de rotura.

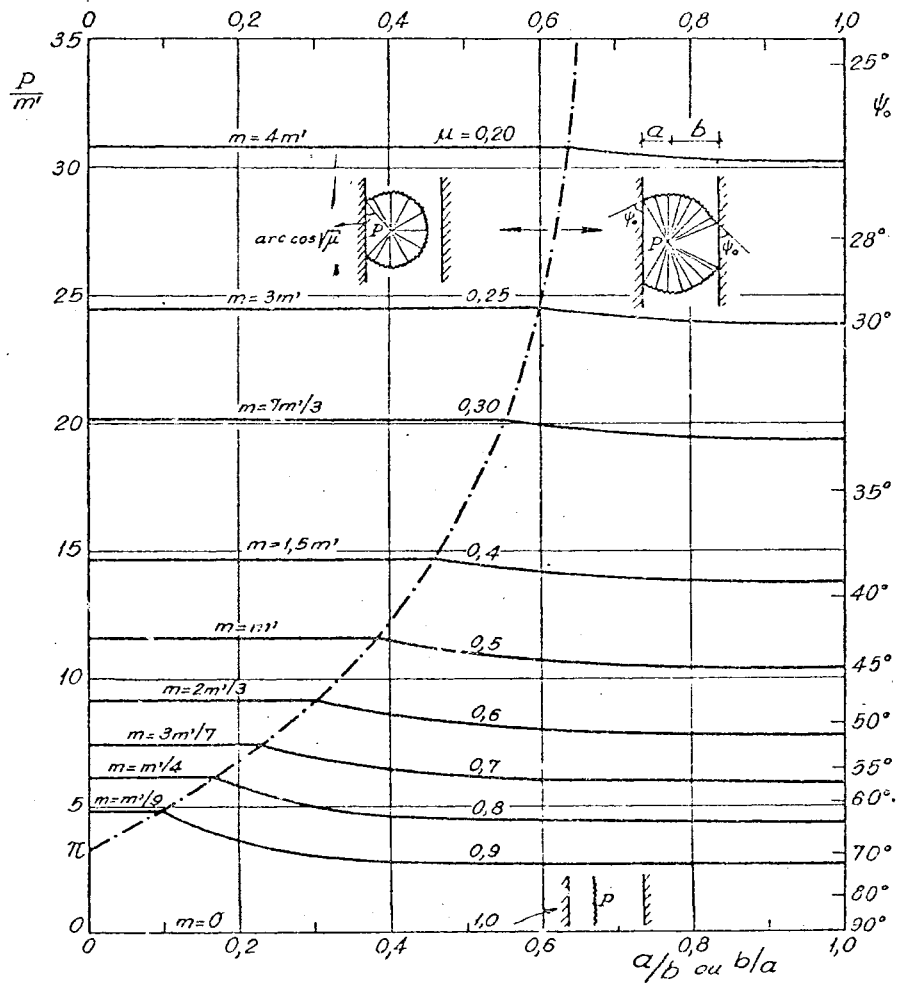


Fig. E 6. 10 e

PUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS.  
CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS.

- Cálculo convencional de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y Ja -  
vier Torres.

246 páginas (AE-79.1)

- Cálculo de estructuras elásticas geométricamente no lineales.

Avelino Samartín.

62 páginas (AE-79.2)

- La viga columna.

Avelino Samartín.

54 páginas (AE-79.3)

- Cálculo matricial de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y Ja -  
vier Torres.

226 páginas (AE-80.3)

- Un programa de generación automática de datos para el cálcu  
lo de emparrillados planos. (GEDE).

Fernando Martínez y Avelino Samartín.

135 páginas (AE-80.2)

- Teoría elemental de vigas alabeadas. Aplicación a la viga -  
balcón circular.

Avelino Samartín y J.R. González de Cangas.

36 páginas (AE-80.3)

- Una contribución al estudio de hiperelementos finitos en flexión de placas.

Julián Díaz del Valle y Avelino Samartín,

392 páginas (AE-80.4)

- Cálculo dinámico y teoría de placas. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y -  
Javier Torres.

159 páginas (AE-80.5)